Exame de Qualificação de Análise Aplicada

04 de Agosto de 2013

Nome e RA:

Obs: Resolva 5 questões entre as 7 a seguir. Justifique todas as suas afirmações de maneira clara e objetiva.

1. O espaço de todas as funções polinomiais em um intervalo fixo, finito e fechado com a métrica do máximo é completo? Prove ou apresente um contra-exemplo.

2. Se Y é um subespaço de um espaço vetorial X no corpo K e f é um funcional linear em (*on*) X tal que $f(Y)$ é um subconjunto próprio de K, mostre que $f(y) = 0, \quad \forall y \in Y$.

3. Mostre a existência de um conjunto ortonormal total para um espaço de Hilbert separável, sem apelar para o Lema de Zorn.

4. Se z é um elemento fixo qualquer de um espaço normado X, mostre que $f(x) = \langle x, z \rangle$ define um funcional linear limitado f em X. Qual é a norma de f?

5. Mostre que um operador linear limitado $T : H \to H$ em um espaço de Hilbert H tem uma imagem de dimensão finita se e somente se T pode se representado na forma

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \, w_j$$

em que $v_j, w_j \in H$.

6. Seja $(X, \|\centerdot\|)$ um espaço vetorial normado e defina

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| + 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

   (a) Mostre que d é uma métrica em X.

   (b) Mostre que (X, d) não é normado, isto é, não existe uma norma $|\|\centerdot\||$ em X tal que $d(x, y) = |\|x - y\||$.

7. Considere o chamado Operador de Volterra

$$V : \begin{cases} L_2[0, 1] & \to L_2[0, 1] \\ f & \mapsto Vf \end{cases}$$

definido por

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) \, dt.$$

   (a) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que $|(Vf)(x)| \leq \sqrt{x} \, \|f\|$

   (b) Deduza então que $\|V\| \leq 1/\sqrt{2}$.

Nota:

EXAME QUALIFICAÇÃO ANÁLISE NUMÉRICA

DOUTORADO EM MATEMÁTICA APLICADA - IMECC/UNICAMP

1º SEMESTRE 2013

Nome: **RA:**

Prova Dissertativa

8 de Março

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
T o t a l	

Boa Prova

Questão 1. **(4.0 Pontos)**

Considere o problema de valor de contorno (PVC) formado pela equação diferencial

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

com condições de contorno de Dirichlet,

$$u(0) = 1, \qquad u(\pi) = -1. \tag{2}$$

Substituindo $u''(x)$ no PVC (1)-(2) pela aproximação centrada de diferenças finitas de segunda ordem no espaço, i.e., $U_j \approx u(x_j)$,

$$D^2U_j = \frac{1}{h^2}(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}), \quad x_j = jh, \quad h = \frac{\pi}{m+1}, \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \cdots, m, \tag{3}$$

pede–se, com as devidas justificativas:

(a) Construa o sistema $AU = F$ de equações lineares associado a discretização do PVC (1)-(2) por (3), levando em conta as condições de contorno no vetor F.

(b) Do ponto de vista teórico, pode-se esperar que o sistema linear do item (a) seja singular, uma vez que o PVC (1)-(2) é mal-posto. No entanto, por causa do erro de discretização associado a aproximação do operador de segunda ordem, o sistema linear do item (a) será **não-singular**, sempre que $h \neq 0$ (no processo $h \longrightarrow 0$).

Calcule os valores próprios da matriz do item (a) para esse problema e mostre que um autovalor se aproxima de 0 (zero) quando $h \neq 0$. Use a técnica da equação modificada para explicar por que o problema discreto (aproximado) $h \neq 0$ exibe um comportamento de um problema bem-posto.

(c) Use o resultado do item (b) para mostrar, de fato, que $||A^{-1}||_2$ torna-se não limitada quando $h \longrightarrow 0$. Isso explicaria rigorosamente a instabilidade numérica da solução (*blow-up*) deste problema em um estudo refinamento da malha computacional ?

Dicas: (i) A matriz do sistema linear do item (a) para o PVC (1)-(2) é simétrica tridiagonal, de tipo Toeplitz, como segue:

$$A = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & 0 & & \dots & 0 \\ d_1 & d_0 & d_1 & & & \\ 0 & d_1 & d_0 & d_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \\ & & & d_1 & d_0 & d_1 \\ 0 & \dots & & 0 & d_1 & d_0 \end{bmatrix} \in \Re^{m \times m}.$$

Os autovalores da matriz "A" do sistema linear do item (a) têm a forma:

Questão 1. (continuação) **(4.0 Pontos)**

$$\lambda_p = d_0 + 2d_1\, cos(p\pi h), \quad p = 1, 2, \cdots, m, \quad \text{sendo} \quad h = \frac{\pi}{m+1}.$$

Note que a matriz A tem de fato dimensão m, uma vez que os valores da condição de contorno não são inclusos no vetor solução. Os autovetores têm componentes da forma:

$$r_{j_p} = sen(p\pi jh), \quad p = 1, 2, \cdots, m.$$

(ii) A matriz "A", e sua inversa "A^{-1}" associada, com respeito ao sistema linear do item (a), exibem na norma-2, respectivamente, as seguintes formas:

$$||A||_2 = \rho(A) = \max_{1 \leq p \leq m} \{|\lambda_p|\},$$

e

$$||A^{-1}||_2 = \rho(A^{-1}) = \max_{1 \leq p \leq m} \{|(\lambda_p)^{-1}|\} = \left(\min_{1 \leq p \leq m} \{|\lambda_p|\}\right)^{-1}.$$

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Se aplicarmos um método de passo único ao PVI,

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

com condição inicial,

$$u(t_0) = u_0, \tag{5}$$

tipicamente obtém-se uma equação da forma,

$$U^{n+1} = R(z)U^n,$$

onde $R(z)$ é alguma função de estabilidade com $z = k\lambda$; tipicamente um polinômio para um método explícito ou uma função racional para um método implícito.

Pede-se, com as devidas justificativas,

(a) Mostre que os dois métodos de "série de Taylor de 4ª ordem" e "Runge-Kutta de 4ª ordem", quando aplicados ao PVI teste (4)-(5), produzem a mesma função $R(z)$.

Dica: O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é dado por:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= U^n, \\
Y_2 &= U^n + \frac{1}{2}kf(Y_1, t_n), \\
Y_3 &= U^n + \frac{1}{2}kf\left(Y_2, t_n + \frac{k}{2}\right), \\
Y_4 &= U^n + kf\left(Y_3, t_n + \frac{k}{2}\right), \\
U^{n+1} &= U^n + \frac{k}{6}\left[f(Y_1, t_n) + 2f\left(Y_2, t_n + \frac{k}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 2f\left(Y_3, t_n + \frac{k}{2}\right) + f(Y_4, t_n + k)\right]
\end{aligned}$$

(b) Se um método é consistente, então $R(z)$ será uma aproximação de e^z para z próximo de zero. Além disso, se esse método é de $p-$ésima ordem, então,

$$R(z) - e^z = O(z^{p+1}), \text{ quando } z \to 0.$$

Explique porque a função $R(z)$ para os métodos do item (a) concordam com e^z para $O(z^4)$, quando $z \to 0$.

Questão 3. **(4.0 Pontos)**

Considere o problema de valor inicial (PVI) formado pela equação diferencial parcial (EDP) de evolução linear, sendo $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \Re, \quad t > 0, \tag{6}$$

com a condição inicial,

$$u(x,t_0) = \eta(x) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}, \qquad x \in \Re, \quad t_0 = 0, \tag{7}$$

sendo a constante ($a \neq 0$). A EDP (6) é conhecida como a equação de advecção linear, que é o exemplo mais simples de uma equação hiperbólica, cuja solução exata é dada por,

$$u(x,t) = \eta(x - at). \tag{8}$$

A solução exata (8) revela que o dado inicial (7) é transladado de forma inalterada e com velocidade a para a direita (se $a > 0$) e para a esquerda (se $a < 0$).

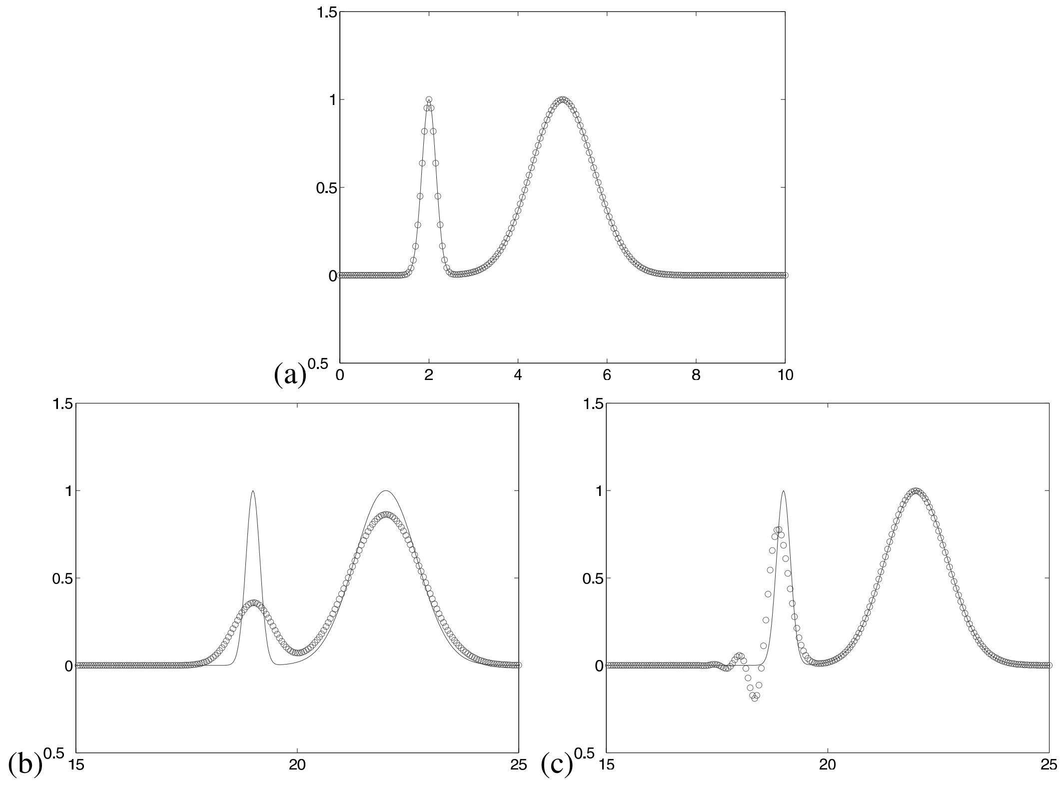

Figura 1: (a) Condição inicial $u(x,0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$. Para um tempo $t^* > 0$, temos as soluções numéricas: (b) Upwind e (c) Lax-Wendroff. A solução exata (8) é também mostrada em linha sólida nos mesmos gráficos para ambos os métodos.

A Figura 1(a) mostra o dado inicial (7). Desta forma, um bom método numérico para o PVI (6)-(7) deve ter a propriedade de preservar a "forma" da condição inicial (7) com "velocidade" de propagação a para qualquer tempo $t > 0$. Considerando uma discretização no espaço-tempo como segue,

$$t_n = n\,k, \quad n = 0, 1, 2 \cdots \qquad x_j = j\,h, \quad j = \cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

onde $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha, e aplicando ao PVI (6)-(7) aproximações de diferenças finitas no tempo e no espaço, pode-se obter (supondo $a > 0$) os seguintes métodos explícitos Upwind e Lax-Wendroff, respectivamente:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right), \tag{10}$$

e

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{a^2k^2}{2h^2}\left(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n\right). \tag{11}$$

Na Figura 1(b) é mostrada a solução numérica do PVI (6)-(7) para um tempo $t^* > 0$ com o método Upwind (10), enquanto que na Figura 1(c) é mostrada a solução numérica para o mesmo problema com o método Lax-Wendroff (11). Para os dois métodos utilizou-se uma velocidade de propagação $a = 1$ com os parâmetros de malha $h = 0.05$ e $k = 0.8h$, o que resulta em um número de Courant $ak/h = 0.8$.

Os resultados mostrados na Figura 1 revelam claramente que o método Upwind (10) exibe um caráter de uma equação de advecção-difusão (Figura 1(b)), que é diferente do método Lax-Wendroff (11), que exibe um caráter de uma equação de advecção-dispersão (Figura 1(c)).

Neste contexto, pede-se, com as devidas justificativas,

(a) Determine a equação diferencial parcial modificada associada ao método Upwind (10), mantendo os termos $O(k)$, para k/h fixo.

(b) Determine a equação diferencial parcial modificada associada ao método Lax-Wendroff (11), mantendo os termos $O(k^2)$, para k/h fixo.

(c) Realize uma análise via transformada de Fourier das equações modificadas obtidas no itens (a) e (b), imediatamente acima, para obter a relação de dispersão associada a cada um dos métodos Upwind (10) e Lax-Wendroff (11). Utilize então esses resultados para explicar a natureza dos resultados mostrados na Figura 1.

(d) Para cada uma das equações diferenciais parciais modificadas obtidas nos itens (a) e (b) é possível escolher um número de Courant adequado de tal forma que essas equações modificadas concordem exatamente com a EDP original (6). Assim, exiba e explique qual é essa escolha adequada para o número de Courant. Note que isso também não é um "chute", mas uma escolha conveniente dos parâmetros k e h que pode ser totalmente justificada com base no resultado obtido no item (c).

Esquema de Beam-Warming para ($a > 0$)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}\left(3U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n\right) + \frac{a^2k^2}{2h^2}\left(U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n\right).$$

Interpolação polinomial de grau n - método de Lagrange

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left[\prod_{i=0;i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}\right]$$

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO

MT 624- Biomatemática I - 08 Março de 2013

ESCOLHA 2 QUESTÕES E RESOLVA-AS DA MELHOR MANEIRA QUE PUDER NO TEMPO DISPONÍVEL.

1-Modelos Discretos

1a-Escreva o Modelo Matemático Discreto de Euler para a dinâmica demográfica de uma população, argumentando convincentemente sobre o significado biológico/demográfico de cada termo e parâmetro.

1b-Escreva o Modelo Simples de Fibonacci (isto é, uma população descrita apenas por duas subpopulações de indivíduos, imaturos e férteis, onde não ocorre mortalidade, cada imaturo torna-se fértil depois de um perído unitário de tempo e cada indivíduo fértil produz um descendente durante cada período unitário de tempo) como um Modelo Demográfico de Euler e resolva-o explicitamente.

1c-Mostre em particular que as sub-populações do modelo anterior crescem exponencialmente e analise o limite da razão entre elas. Interprete o resultado.

2-Modelos de Interação

2a-Escreva o Modelo Lotka-Volterra para a dinâmica Presa-Predador argumentando convincentemente sobre o significado biológico/demográfico de cada termo e parâmetro.

2b-Mostre que este modelo tem, em geral, soluções oscilatórias (exceto casos excepcionais) e critique este resultado sob o ponto de vista do modelo biológico.

2c-Critique (construtivamente) as hipóteses utilizadas na formulação do modelo anterior e formule um novo modelo que inclua efeitos de saturação Verhulstiana e efeito Allee.

2d-Reescreva o modelo em uma forma adimensional.

3-Modelos de Epidemiologia

Considere o Modelo de Ross-MacDonald para a malária onde estão consideradas as populações humanas de Susceptíveis, $S(t)$, Infecciosos, $I(t)$, e Removidos, $R(t)$, e populações de mosquitos, não-ninfectados, $m(t)$, e infectados-infecciosos, $M(t)$ em cada instante t:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -AMS + bR \\
\frac{dI}{dt} &= AMS - \lambda I \\
\frac{dR}{dt} &= \lambda I - bR \\
\frac{dm}{dt} &= -\gamma mI + \rho(m+M)\left(1 - \frac{m+M}{K_M}\right) - dm \\
\frac{dM}{dt} &= \gamma mI - dM
\end{aligned}$$

3a-Considerando que todos os parâmetros do modelo, $A, b, \lambda, \gamma, K_M, d_m, d$ são constantes, interprete biologicamente cada equação e seus respectivos parâmetros.

3b-Obtenha condições nos parâmetros para que a população total dos mosquitos entre em extinção e considerando o contrário considere esta população no seu estado saturado.

3c-Considerando que a população total de mosquitos não se extingue, mostre que ela deverá atingir uma saturação. Supondo que esta saturação seja rapidamente atingida, obtenha uma equação para a população de mosquitos infectados, $M(t)$.

3d-Considerando também que a dinâmica de mosquitos seja muito mais rápida que a da doença suponha que a sua população $M(t)$ atinja um equilibrio Quase-Estacionário, ou seja, obtenha uma função de resposta $M = f(I, A, b, \lambda, \gamma, K_M, d_m, d)$ que determine a população de mosquitos infectados em cada momento para o respectivo valor de humanos infectados, I, que é do tipo Holling II.

3e-Utilizando todas as suposições acima, obtenha um modelo de malária reduzido que envolva apenas $S(t)$ e $I(t)$.

4-Modelos com Retardamento

4a-Escreva o modelo Malthusiano com retardamento, ou seja, considere a reprodução per capita no instante t com relação ao valor da população em um instante precedente, $t - T$, com $T > 0$.

4b-Mostre que este modelo não é uma equação diferencial ordinária de ordem finita mas que pode ter uma solução exponencial que todavia não satisfaz, em geral, a condição inicial.

4c-Descreva como obter a dinâmica de um população regida por este modelo a partir de sua condição inicial utilizando o principio de superposição.

4d-Descreva, qualitativamente, a possibilidade de um fenômeno de bifurcação de Hopf para este problema com respeito ao parâmetro T, de retardamento.

4e-Mostre como e porque introduzir o retardamento no modelo de Verhulst e como analisar o fenômeno de bifurcação de Hopf neste caso.

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MT709 – Equações Diferenciais Parciais – 8 março 2012

INSTRUÇÕES

Todas as questões valem 2.5 pontos.

Questão 1. Resolva o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx}, \quad x \in (0, \pi),\, t > 0, \\ u(x, 0) = 1,\ u_t(x, 0) = \cos x, \\ u_x(0, t) = 0,\ u_x(\pi, x) = 0. \end{cases}$$

Questão 2. Resolva o problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1),\, t > 0, \\ u_x(0, t) = 2u(0, t), \\ u_x(1, t) = u(1, t),\, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Questão 3. Seja a uma constante. Use a transformada de Fourier para resolver o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + au_x, \quad x \in \mathbf{R},\, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Questão 4. Resolva,utilizando coordenadas polares, o problema

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u(1, \theta) = \sin\theta, \\ u(2, \theta) = 1. \end{cases}$$

Formulário, eventualmente, útil

- Série e Coeficientes de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \mathrm{d}x$$

- Laplaciano em Coordenadas Polares

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

Boa Prova!

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

MT601 — 1º Semestre de 2013

Nome: ______________________ RA: __________

Exame de qualificação (08/03/2013)

1. Considere o seguinte problema
$$\text{Min} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad s.a \quad x_1 + x_2 = 2.$$
   (a) Encontre a solução de forma gráfica e analítica.
   (b) Aplique penalização quadrática pura e mostre que para achar a solução, o parâmetro de penalização ρ tem que tender a infinito. Escreva a expressão para $x(\rho)$ neste caso.
   (c) Aplique penalização não diferenciável e verifique se existe um parâmetro de penalização $\rho > 0$ finito tal que a solução do problema penalizado coincida com a solução do problema original.
   (d) Escreva o subproblema de Lagrangianos aumentados, com o multiplicador ótimo associado à solução do problema, e com um parâmetro de penalização $\rho > 0$ qualquer. Qual é a solução desse subproblema? Discuta as consequências de se trabalhar, em Lagrangianos aumentados, com o(s) multiplicador(es) correto(s), nesse caso particular, e em geral.

2. Seja o problema
$$\text{Min} \quad f(x) \quad s.a \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \text{ com } f, g \in C^1.$$
   Suponha que $g_i(\bar{x}) = 0, \;\; i = 1, \dots, p$ e que
$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \mu_p \nabla g_p(\bar{x}) = 0,$$
   onde $\bar{x}$ é um *ponto regular* e $\mu_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, p-1$ e $\mu_p < 0$.
   (a) Prove que $\bar{x}$ não é um minimizador local do problema.
   (b) Se o ponto $\bar{x}$ satisfaz a condição de qualificação de Mangasarian- Fromovitz, vale o mesmo resultado?

3. Seja o problema
$$\text{Min} \quad \frac{1}{2}((x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2) \quad s.a \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \;\; 0 \leq x_2 \leq 3, \;\; x_1 + x_2 \leq 4.$$
   Resolvê-lo pelo *método das restrições ativas*, começando do ponto $x = (2, 0)$.

4. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f, g \in C^2$ e $\widetilde{x} \in \Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$ um ponto qualificado. Suponha que existe $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\mu \geq 0$ tal que $\nabla f(\widetilde{x}) + J_g(\widetilde{x})^T \mu = 0$, $\mu_j g_j(\widetilde{x}) = 0$, $j = 1, \dots, p$ e a matriz $\nabla^2 f(\widetilde{x})$ é positiva definida em $\mathbb{R}^n$. Isso implica que $\widetilde{x}$ é minimizador local de $f(x)$ no conjunto Ω? Prove ou dê um contra-exemplo.

MT503 - PROGRAMAÇAO LINEAR - Exame de Qualificação

Nome: RA:

Resolva quatro das seis questões apresentadas abaixo.

1. Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando argumentos geométricos, dê a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo para os seguintes valores do vetor c:

(a) $c = (-1, 0, 1)$ (b) $c = (0, 1, 0)$ (c) $c = (0, 0, -1)$

2. Para cada um dos PPL abaixo, dê a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo em termos do parâmetro c, supondo que $\mathbb{1} = (1\ 1\ 1\ \ldots 1)^T$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & -1 \leq \mathbb{1}^T x \leq 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1 \end{aligned}$$

3. Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

no qual

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Partindo do ponto $(0, 4)$, aplique o método simplex primal até obter a solução ótima.

(b) Determine o maior e o menor valor que c_1 pode ter para que a base ótima encontrada no item (a) permaneça inalterada.

(c) O *preço sombra* de um item i é a variação do valor ótimo da função objetivo provocada pelo aumento de uma unidade em b_i. Determine o preço sombra de cada restrição do problema.

(d) Determine o maior e o menor valor que b_1 pode ter para que a base ótima encontrada no item (a) permaneça inalterada.

4. Considere o seguinte conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$: $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,1)$, $p_3 = (2,2)$ e $p_4 = (4,0)$.

   (a) Ilustre, graficamente, o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos.

   (b) Imagine que você vá montar um problema de programação linear cuja região factível seja a região determinada no item (a). Descreva essa região factível usando o menor número possível de restrições lineares de igualdade e desigualdade.

   (c) Usando as restrições encontradas no item (b), crie um problema de programação linear de modo que o ponto $(3,1)$ seja ótimo.

   (d) Escreva o dual do problema do item (c).

   (e) Conhecendo a solução ótima do problema primal, o que você pode afirmar sobre a solução do problema dual, antes mesmo de resolvê-lo?

   (f) Escreva as condições de otimalidade do problema.

   (g) Usando as condições de otimalidade, determine a solução ótima do problema dual.

5. Considere o método primal-dual seguidor de caminho.

   (a) Aponte as vantagens deste método em relação aos métodos primal afim escala, dual afim escala e primal-dual afim escala.

   (b) Descreva as alterações deste método para obter o método preditor-corretor.

6. Considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ \text{s. a} & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & x_1 \text{ livre} \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre o dual desse problema.

   (b) Escreva as condições de otimalidade desse problema.

   (c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método primal-dual seguidor de caminho para este problema.

   (d) Encontre o sistema de equações normais em função de dy através de eliminação de variáveis. Não se preocupe em desenvolver o lado direito das equações.

MATRIZES - 06/03/13

1. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Descreva um método de resolução para este sistema de modo a detectar se tal sistema admite solução e se esta solução é única.

   (b) Seja $A : n \times n$ tal que $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. Onde $A_{11} : p \times p$ e $A_{22} : q \times q$. Escolha um método direto de resolução de sistemas e descreva como resolver o sistema linear $Ax = b$ de modo a tirar proveito da estrutura de A. Seu procedimento deve indicar a existência e unicidade da solução.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Faça uma análise detalhada a respeito da existência, unicidade, possibilidade de infinitas soluções de quadrados mínimos para este sistema.

   (b) Demonstre detalhadamente que $\bar{y} = A^\dagger b$ é a solução de norma–2 mínima para o problema $\min \|b - Ax\|_2$.

   (c) Demonstre que todas soluções y de $\min_x \|Ax - b\|_2$ têm o mesmo resíduo $b - Ay = (I - AA^\dagger)b$.

   (d) Interprete o vetor $\bar{y}$ do item (a) se o vetor b satisfaz: $A^t b = 0$.

3. Sejam T uma matriz tridiagonal, $n \times n$, R uma matriz triangular superior, $n \times n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica com autovalores: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

   (a) Mostre que TR é Hessenberg.

   (b) Demonstre que λ_i é um número real.

   (c) Considere e o método QR iterativo para estimar os autovalores de A. Descreva este método. Explique a vantagem e/ou necessidade de previamente reduzir A a uma matriz tridiagonal através de transformações ortogonais. Neste caso, explique como realizar esta redução e por que a matriz é reduzida à forma tridiagonal. O resultado do item (a) é importante para este procedimento?

4. Obtenha a decomposição SVD da matriz $C = wz^t$ onde $w : m \times 1$ e $z = n \times 1$ são vetores não nulos.