EQD - 2011 - Eq. Dif. Parciais

1Q: Resolva o seguinte Problema de Sturm-Liouville

$$(x^3 y')' + \lambda x y = 0 \quad , \quad 1 \leq x \leq e$$
$$y(1) = 0 \; ; \; y(e) = 0$$

2Q: (a) Ache a Expansão de Fourier da função $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 \leq x \leq \pi$ em uma série de senos.

(b) Use a parte (a) e demonstre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{\pi}{4}$$

3Q: Considere o conjunto ortonormal

$$\{\phi_n(x) = \sqrt{2}\, \text{sen}(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

e seja a função $f(x) = 1$ definida em $[0,1]$. Use a desigualdade de Bessel e mostre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

4Q: Resolva o Problema do Calor:

$$u_t = k\, u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l \, , \; t > 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

5Q: Resolva o PVF (de Dirichlet) no círculo de raio a:

$$\Delta u = 0$$
$$u(a,\theta) = \cos\theta$$

Bom Exame!

-Obs: Resolva 4 problemas.
Os problemas 4 e 5 são obrigatórios.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA DOUTORADO-2011

I-

Considere uma função de duas variáveis $u \in C^1([0,1] \times [0,1], \mathbf{R})$. Analise a continuidade da função $U : [0,1] \to \mathbf{E}$, definida por $U(t)(x) = u(t,x)$ nos seguintes casos:

a-$\mathbf{E} = C^0([0,1], \mathbf{R}), \|.\|_\infty$, onde $\|f\|_\infty = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)|$

b-$\mathbf{E} = C^1([0,1], \mathbf{R}), \|.\|_{1,\infty}$, onde $\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_\infty + \left\| \frac{df}{dx} \right\|_\infty$

II-

Considere um espaço de Hilbert H e $A : H \to H$ um operador *Lipschitziano*, não necessariamente linear, mas *uniformemente monotônico*, ou seja,

$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geqq m\|x - y\|^2$, $\forall x, y \in H$, onde $m > 0$.

Mostre que a equação $Ax = y$, tem sempre solução *única e estável* com relação a y, isto é, A^{-1} *existe e é contínua*.

(Sugestão: Considere a equação $Ax = y$ na forma "*relaxada*", $x + \lambda(Ax - y) = x$ e determine a contratividade da função $\varphi(x, y, \lambda) = x + \lambda(Ax - y)$ para um parâmetro real adequado λ, analisando $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|^2$).

III

Analise, impondo condições simples e deduzindo resultados de razoável interesse, a questão de existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - z, t) u(z, t) dz + f(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

IV-

Considere o Espaço Vetorial:

$\mathbf{E} = \left\{ f \in C^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}), \forall \lambda > 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) e^{-\lambda x} = 0 \right\}. (\mathbf{R}^+ = [0, \infty))$

a-Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x) g(x) e^{-x} dx$ define um produto interno em $\mathbf{E}$ e calcule $\langle \cos x, sen x \rangle$.

b-Descreva um método recursivo para a construção de uma *base ortonormal* para o subespaço dos polinomios

$\mathbf{F} = P(\mathbf{R}) = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_k \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N} \right\} \subset \mathbf{E}$ obtendo os seus *dois* primeiros termos.

V-

Considere E e M espaços métricos, *M completo*, e E_0 um subconjunto *denso* em E .
a-Mostre que toda função *uniformemente contínua* $f : E_0 \to M$, admite uma *única extensão contínua* $\overline{f} : E \to M$.
b-Apresente um exemplo simples que ilustre o papel crucial da condição de "*uniformidade continua*" para o resultado acima, mantendo-se as outras condições.

Programação Linear - Exame de Qualificação - 03/2011

1. Mostre que os dois problemas abaixo são equivalentes.

$$
\begin{array}{rll}
(P1) & \min & c^t x \\
 & \text{sa} & b_1 \le Ax \le b_2 \\
 & & x \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
(P2) & \min & c^t x \\
 & \text{sa} & Ax + s = b_2 \\
 & & 0 \le s \le b_2 - b_1.
\end{array}
$$

2. Escreva as condições de otimalidade para cada um dos problemas abaixo:

$$
\begin{array}{rl}
\max & c^t x \\
\text{sa} & Ax \ge b \\
 & x \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^t x \\
\text{sa} & Ax \le b \\
 & x \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^t x \\
\text{sa} & A_1 x = b_1 \\
 & A_2 x \ge b_2 \\
 & x \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^t x \\
\text{sa} & Ax = b \\
 & l \le x \le u.
\end{array}
$$

3. Mostre que as componentes dos resíduo primal r_p^k e resíduo dual r_d^k no método primal-dual afim escala tem o mesmo sinal das componentes de r_p^0 e r_d^0. Ou seja, elas não trocam de sinal.

4. Desenvolva o método de pontos interiores preditor-corretor para o problema canalizado na forma padrão:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^t x \\
\text{sa} & Ax = b \\
 & 0 \le x \le u.
\end{array}
$$

EXAME DE QUALIFACAÇÃO – MT402 MATRIZES

02/03/2011

1) Seja $A \in I\!R^{m \times n}$.
(a) Defina $\|A\|_{\alpha,\beta}$, a norma de A induzida pelas normas α e β de vetores.
(b) A norma de Frobenius de A, $\|A\|_F$, é induzida por norma de vetores? Justifique sua resposta.
(c) Se A é não singular, mostre que:

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{min_{\|x\|=1}\|Ax\|}.$$

---

2) Sejam $A \in I\!R^{n \times n}$, não singular, x e $b \in I\!R^n$.
(a) Defina número de condição de A, $Cond(A)$, e descreva algumas propriedades desse número.
(b) Mostre o comportamento da solução de um sistema linear $Ax = b$, em função do número de condição de A, quando só o vetor b sofre uma perturbação δb.
(c) $Cond(A)$ é uma medida mais confiável para se analisar o mau condicionamento de um sistema linear do que $Det(A)$? Justifique.

---

3) Considere aproximar a solução do sistema linear $Ax = b$, onde $A \in I\!R^{m \times n}$ e x e b são vetores do $I\!R^n$, por um método iterativo.
(a) Quando devemos utilizar esses métodos e por que?
(b) Considere os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.
(b1) Qual a forma geral da classe de métodos à qual eles pertencem?
(b2) Qual a matriz de iteração de cada um deles?
(b3) Mostre que ambos são métodos de ponto fixo.
(b4) Discuta resultados de convergência desses métodos.

---

4) Seja $A \in I\!R^{n \times n}$. Escreva o que você sabe sobre fatorações de A em matrizes triangulares, levando em conta: existência e unicidade das fatorações, condições sobre A em relação a fatorações especiais.

---

5) Considere o problema de quadrados mínimos

$$Min_x \|Ax - b\|_2 \quad (QM),$$

onde $A \in I\!R^{m \times n}$, $m \geq n$ e $posto(A) = p < n$.
(a) Mostre que (QM) tem infinitas soluções, justificando todas as afirmações usadas.
(b) Formule o problema de encontrar a solução de norma-2 mínima de (QM).
(c) Qual o método mais adequado para determinar a solução de norma-2 mínima de (QM)? Descreva como esta solução pode ser obtida através deste método.

DMA – IMECC – UNICAMP
4/ Março/2011

MT 601 - Métodos Computacionais de otimização
Profs Francisco Gomes e Roberto Andreani

Exame de Qualificação

Questão 1: Seja dada uma função quadrática $f : I\!R^n \to I\!R$ com Hessiana definida positiva. Mostrar que

(a) Se $\nabla f(x_0) \neq 0$, então a partir de x_0 se chega à solução com um passo do método do gradiente, somente se $\nabla f(x_0)$ é um autovetor da Hessiana da quadrática.

(b) usando (a) mostrar que o método do gradiente não tem terminação finita se $\nabla f(x_0)$ não é um autovetor da matriz Hessiana

---

Questão 2: Seja dado o problema

$$\min \; f(x) \; \text{ s.a } \; g(x) \leq 0,$$

com $f : I\!R^2 \to I\!R$ e $g : I\!R^2 \to R^2$.

(a) Mostrar que, se as restrições são ativas

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \nabla g_i(x) = 0$$

com algum $\mu_i < 0$, então existe uma direção fativel de descida d a partir de x.

(b) Em (a) suponhamos que todos os multiplicadores são não negativos e que $\nabla^2 f(x) > 0$. Isso é suficiente para asegurar que x é um minimo local?

Questão 3: Seja dado o problema

$$\text{Min} \; f(x) \; \text{ s.a } \; a_i^T x - b_i \leq 0.$$

com $f : I\!R^n \to I\!R$. Mostrar que, se x é minimizador local, as condições KKT se verificam em x.

Questão 4: Seja dado o problema

$$\min \; f(x, y) \; \text{ s.a } \; x \geq 0 \; \text{ e } \; y \geq 0.$$

e seja $(0, 0)$ um ponto estacionário e μ_1 e μ_2 os respectivos multiplicadores. Escrever e analizar a condição suficiente de segunda ordem para os seguintes casos

(a) os dois multiplicadores são diferentes de zero

(b) um multiplicador é diferente de zero

(c) os dois mutiplicadores são iguais a zero.

Questão 5: Seja dado o problema

$$\min \; f(x) \; \text{ s.a } \; c(x) = 0.$$

Considere a aplicação de um algoritmo de programação quadrática sequencial, com região de confiança, a esse problema. Suponha que, a cada iteração k, dado o ponto x_k, o problema é aproximado por

$$\min \; \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k) p + \nabla f(x_k)^T p \quad \text{s.a } \; A(x_k) p + c(x_k) = 0, \quad \|p\|_\infty \leq \Delta_k,$$

onde A é a matriz Jacobiana das restrições. Suponha que $\nabla^2 f(x_k) > 0$ e que $A(x_k)$ tenha posto linha completo. Provar ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) Existe p que resolve o problema acima.

(b) Se x_k é factível, então p é uma direção de descida para f.

(c) Se $p = 0$, então x_k é um ponto estacionário do problema original.

(d) Se x_k é factível e $p = 0$, então x_k é um minimizador local do problema original.

Respostas não justificadas não serão consideradas.

Exame de Qualificação 04/03/2011

Doutorado em Matemática Aplicada

Nome: ______________________________________

Análise Numérica

1. Considere a equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$, $0 < x, y < 1$.

   (a) Deduza duas possiveis discretizações para condições de contorno nas derivadas (condição de Neumann), de modo que as aproximações sejam de segunda ordem.

   (b) Escreva as equações discretizadas para a equação de Poisson com condições de Neumann em pelo menos duas arestas do contorno. Quais as possíveis condições de contorno nas outras arestas? Tome uma malha igualmente espaçada de comprimento h.

   (c) Discretizadas as derivadas obtemos um sistema linear $A^h U^h = F^h$. Defina estabilidade neste caso. Tomando um caso particular no qual os autovalores de A^h sejam

   $$\lambda_{p,q} = \frac{2}{h^2} \left[\, (cos(p\pi h) - 1) + (cos(q\pi h) - 1) \, \right],$$

   analise sua estabilidade, explicitando a norma utilizada.

2. Seja o PVI bem posto $u'(t) = f(u), \ u(0) = \eta$.

   (a) Deduza a expressão do método trapezoidal para este problema e encontre o erro de truncamento local deste método.

   (b) Defina região de estabilidade de um método numérico para este tipo de problema. Em particular encontre a região de estabilidade do método trapezoidal.

   (c) O que você pode afirmar sobre a convergencia do método trapezoidal?

   (d) O que você sabe sobre o método das linhas para a equação do calor? Como os resultados dos itens anteriores poderiam ser aproveitados neste caso?

3. Considere a equação advectiva $u_t + a\, u_x = 0, \ x \in \ R, \ a$ constante.

   (a) Deduza o método upwind para um PVI associado à esta equação.

   (b) Faça a análise de estabilidade e convergência deste método.

   (c) Apresente um método para este tipo de problema que tenha ordem de aproximação superior à do método upwind. Comente sobre sua estabilidade.

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO MARÇO/2010
MT 520 – TRATAMENTO DE SINAIS DIGITAIS

UNICAMP

$\boxed{1}$ Defina a Transformada de Fourier de uma função $f : I\!R \to I\!R$, indicando condições que garantam a sua existência. Explique através de um exemplo o significado da Tranformada de Fourier.

$\boxed{2}$ Seja $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(t) = 0$ para $|t| > \tau > 0$.
(a) Qual é a relação entre os coeficientes da Série de Fourier de f em $[-\tau, \tau]$ e a Transformada de Fourier de f?
(b) Qual é a consequência desse fato em relação à Transformada de Fourier Discreta?
(c) Baseado em (a) e (b), descreva um procedimento de interpolação para uma função discretizada uniformemente num intervalo qualquer $[t_a, t_b]$.
(d) Denotando por $\widehat{f}$ a Tranformada de Fourier de f prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\pi x/\tau)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\pi n/\tau)|^2.$$

$\boxed{3}$ Seja s um sinal real e dado $\Delta > 0$ considere o sinal real u definido por

$$u(t) = \frac{s(t-\Delta) + 2s(t) + s(t+\Delta)}{4}.$$

Determine o filtro, nos domínios do tempo e da frequência, que gera u a partir de s e explique a sua atuação.