# PROGRAMAÇAO LINEAR - Exame de Qualificação

| Nome: | RA: |
|---|---|

Atenção: respostas sem justificativa não serão consideradas para correção.

**1)** Responda as seguintes questões dando uma explicação concisa com respeito ao programa linear $\max c^T x$ sujeito a $x \in X = \{x : Ax = b, \ \ x \geq 0\}$ , onde $A$ é uma matriz $m \times m$ de posto $m < n$.

(a) Nas equações básicas, se $z_j - c_j = -\bar{c}_j = -10$ para uma variável não-básica $x_j$ , qual é o aumento no valor da função-objetivo quando $x_j$ entra na base com o valor de 2 unidades?
(b) Se um ponto extremo é ótimo, então é possível que nem todos os $z_j - c_j = -\bar{c}_j \geq 0$ para a base que o representa?
(c) Se existe um $d$ tal que $Ad = 0, \ \ d \geq 0$ e $c^T d > 0$, então temos uma solução ilimitada para o problema?
(d) Seja uma solução factível com exatamente $m$ componentes positivos. Essa solução é necessariamente um ponto extremo de $X$?
(e) Se uma variável não-básica $x_k$ tem $z_k - c_k = -\bar{c}_k = 0$ na otimalidade, então podemos afirmar que existe uma solução ótima alternativa?
(f) Se $x_1$ e $x_2$ são pontos adjacentes e se $B_1$ e $B_2$ são as respectivas bases associadas, então estas bases diferem em apenas uma coluna. Verdadeiro ou Falso?

**2)** As perguntas abaixo referem-se ao par primal-dual (min-max). Responda dando uma breve justificativa.

(a) Se uma solução básica para o primal é infactível e tem um valor da função-objetivo menor que o valor ótimo então a solução dual associada é uma solução factível. Verdadeiro ou Falso?
(b) Seja dado o PL $\min \ x_1$ sujeito a $2x_1 - x_2 \geq 0, -2x_1 + 3x_2 \geq -6, x \geq 0$. Considere a base $B = [a^1, a^4]$. Dê a solução dual associada. O que você pode dizer sobre o pair primal-dual?
(c) Se $P$ tem soluções alternativas no ótimo e se $w^*$ é uma solução ótima para o dual então $w^*$ deve ser degenerado. Verdadeiro ou Falso?
(d) Seja $z^*$ o valor da solução ótima (finito) para o primal e o dual. Suponha que $\overline{x}$ é uma solução infactível para o primal cuja solução dual associada seja factível. É possível que $z(\overline{x})$ seja igual a $z^*$?
(e) Se $P$ é ilimitada então é possível trocar os componentes do vetor $b$ e assim obter um ótimo finito?

**3)** Considere o problema que consiste em $\min \ -2x_1 + x_2$ sujeito a $x_1 \leq 4, \ x_1 - x_2 \leq 2, \ -x_1 - 2x_2 \leq -5, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$, cuja solução ótima é $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$. Usando análise de sensibilidade sempre que possível, responda as perguntas abaixo.

(a) Formule o problema dual associado ao problema primal acima, e determine sua solução.
(b) Para qual intervalo de $b_2$ a base ótima permanece a mesma?
(c) Usando o algoritmo dual simplex a partir do ponto dado acima, determine qual seria a solução ótima se $b_3$ valesse $-10$, em lugar de $-5$? Forneça o novo valor da função objetivo.
(d) Para qual intervalo de $c_2$ a solução ótima permanece a mesma?
(e) Suponha que o vetor $c$ seja modificado na direção $[1 \ 0]^T$, ou seja, considere o vetor de custos $c + \lambda[1 \ 0]^T$, com $\lambda \geq 0$. Usando análise paramétrica, encontre a sequência de bases ótimas. Trace o gráfico da função $z^*(\lambda)$, que fornece o valor ótimo da função objetivo com relação a $\lambda$.
(f) Imagine que seja possível incluir uma nova variável $x_3$, com coeficiente $2$ na primeira equação, coeficiente $2$ na segunda equação e coeficiente $0$ na terceira equação (ou seja, $A_3 = [2 \ 2 \ 0]^T$). Para quais valores de $c_3$ a solução ótima dada acima permanece a mesma?

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE APLICADA
## março de 2010

NOME: RA:

Resolva cinco exercícios, sendo dois da Parte I e três da Parte II .

- **Parte I**

1. a) Seja $X = \{f : R \to R; f$ contínua e limitada$\}$ um espaço vetorial munido da norma $||.||_\infty$ e considere
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$
Sendo $F = \{f; f(x) = g(x-n),\ n \in N\}$, mostre que $F \subset X$ é um conjunto fechado, limitado. $F$ é compacto? Justifique sua resposta.

   b) Se $(x_n)$ e $(y_n)$ são duas sequências de Cauchy em um espaço métrico $(X, d)$, mostre que a sequência $(a_n)$, em que $a_n = d(x_n, y_n)$, é convergente.

2. a) Seja $X = C[0, 1]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas em $[0, 1]$ munido da distância
$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$
Este espaço métrico é completo? Se a resposta for afirmativa, prove. Caso contrário, construa uma sequência de Cauchy que não seja convergente.

   b) Prove que $(X, d)$ é separável.

3. a) Mostre que $C^\infty_{per} = \{f \in C^\infty[0, 1]; f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ para todo $k \in N\}$, o espaço de funções infinitamente diferenciáveis l-periódicas, é denso em $L^2[0, 1]$.

   b) Prove que uma aplicação $T : X \to Y$ entre espaços métricos $(X, d_1)$, $(Y, d_2)$ é contínua se e somente se a imagem $y_n = T(x_n)$ de qualquer sequência $(x_n)$ convergente em $X$ formar uma sequência convergente em $Y$.

- **Parte II**

1. a) Em $C[-1,1]$, com a norma $||.||_\infty$, prove que

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$$

é um funcional linear limitado, e calcule sua norma.

b) Sejam $X$, $Y$ espaços normados e $X'$ e $Y'$ seus espaços duais. Para um operador limitado $T : X \to Y$ defina $T^\times : Y' \to X'$ de forma que $(T^\times g)(x) = g(T(x))$. Prove que $T^\times$ é um operador linear limitado, sendo $||T^\times|| \leq ||T||$.

2. a) Descreva o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt num espaço de Hilbert, identificando os princípios importantes em que se baseia.

b) Em $L^2[0,+\infty)$, aplicando o processo de de Gram-Schmidt à sequência $e^{-t/2}, te^{-t/2}, t^2e^{-t/2}, \cdots$ obtém-se uma sequência ortogonormal $e_n(t) = e^{-t/2}L_n(t)$, em que $L_n(t)$ são polinômios de grau $n$. Calcule $L_n(t)$ para $n = 0, 1$ e $2$. (Obs.: $\int_0^\infty t^k e^{-t}dt = k!$)

3. Seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado em espaços de Hilbert $X$ e $Y$. a) Definir o operador adjunto $T^*$ e os conceitos de operadores auto-adjuntos, normais e unitários

b) Prove que $||TT^*|| = ||T||||T^*|| = ||T||^2$.

4. a) Enuncie o Teorema do Ponto Fixo. b) Considere $f : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ a função definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Prove que $f$ não tem ponto fixo. Analise todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo, identificando, para este exemplo, quais aquelas que são verificadas ou não.

**Boa Sorte!!!**

Exame de Qualificação: Analise Numérica — março/2010

Doutorado em Matemática Aplicada

Nome: ________________________________________

ATENÇÃO: Cada questão vale 2 pontos; será aprovado(a) quem somar mais de 6 pontos.

1. Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar a discretizacao de $u''(x)$ com erro de truncamento de quarta ordem.

2. (a) Em que consiste a análise de estabilidade de von Neumann para equações diferenciais parciais?
   (b) Ainda com relação ao item anterior, apresente um exemplo completo explicitando a EDP, a discretização, analise de estabilidade, consequências da estabilidade.
   (c) Quais outras formas de análise de estabilidade que você conhece?

3. No equacionamento de princípios conservativos a função fluxo pode depender da própria solução. Nestes casos a EDP é uma lei de conservação não-linear: $u_t + f(u)_x = 0$.
   (a) Deduza a equação acima.
   (b) Como podemos adaptar o método upwind neste caso?

4. As equações modificadas, associadas à uma discretização para uma EDP, nos ajudam a entender comportamentos difusivos e oscilatórios que eventualmente aparecem nos resultados numéricos. Escreva o que você sabe sobre estas equações modificadas e apresente um exemplo ilustrativo.

5. Em que consiste o método de direções alternadas, ADI, para equações difusivas 2D? Apresente uma discretização deste tipo. Comente sobre o erro de truncamento.

6. Apresente as definições de Consistência, Estabilidade e Convergência de um esquema de diferenças finitas para uma EDP linear. Moste que consistência e estabilidade implicam em convergência.

7. Escreva com detalhes o Método das Linhas para um problema parabólico 1D. Apresente um esquema de segunda ordem basedo neste método e analise sua estabilidade

**EXAME DE QUALIFICAÇÃO**
**12/02/2010**

**COMBINATÓRIA ENUMERATIVA**

Resolver 4 dentre as questões dadas abaixo:

1-(a) Enunciar o Teorema de Burnside

(b) Enunciar um problema que possa ser resolvido pela aplicação deste teorema fornecendo sua solução.

2- Conhecido o tipo cíclico de uma permutação como se pode calcular o número de permutações tendo este tipo cíclico?

3- Quantos são os diferentes padrões que se pode obter pela coloração de um tabuleiro (4X4), preto e branco, de tal forma que se tenha exatamente 3 quadrados com a cor branca e 13 com a cor preta? (considere o grupo das 8 simetrias do quadrado).

4- (a) Definir partição irrestrita, comentando sobre sua função geradora e representação gráfica.

Fornecer, também, a função geradora para alguma classe de partições com restrições.

(b) Fornecer, pelo menos, 2 identidades combinatórias, envolvendo funções geradoras e as respectivas interpretações combinatórias.

5- Enunciar o Teorema dos Números Pentagonais de Euler descrevendo uma demonstração de natureza combinatória ou analítica.

6- Definir os polinômios de Gauss e demonstrar alguma das várias propriedades verificadas por estes polinômios. Dar, pelo menos, uma interpretação combinatória para estes polinômios.

7- (a) Calcular as ordens dos elementos do grupo de simetrias de um quadrado.

(b) Mostrar que um grupo onde todo elemento, diferente da identidade, tem ordem 2 é comutativo.

(c) Definir "tipo cíclico" de uma permutação e sua relação com partição.

8- Como se define a ação de um grupo G em um conjunto X?

Considere um grupo G que age no conjunto X e defina, para elementos x e y de X, a relação $x \sim y$ se, e somente se, para algum g em G , $g.x=y$.

Mostrar que esta relação é uma relação de equivalência em X.

# Exame de Qualificação ao Doutorado em Matemática Aplicada

MATRIZES - 10 de Março de 2010

Profa. Dra. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

Profa. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes

---

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

   (a) Defina $\|A\|_{\alpha,\beta}$ a norma de $A$, induzida pelas normas $\alpha$ e $\beta$ de vetores.

   (b) A norma de Frobenius de $A$, $\|A\|_F$ é induzida por norma de vetores? Justifique sua resposta.

   (c) Considere agora que $m = n$, que $A$ é matriz inversível e que desejamos resolver o sistema linear de equações $Ax = b$. Se $b$ é perturbado de $\delta b$, mostre que

   $$\frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|} \leq Cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|},$$

   onde $x^*$ é a solução do sistema linear.

   (d) Suponha $m \leq n$. Analise existência e unicidade de solução do sistema linear $Ax = b$, neste caso. (Sugestão: Use resultados envolvendo $Im(A)$ e $N(A)$.)

---

2. Seja o problema de quadrados mínimos

   $$Min\|Ax - b\|_2,$$

   onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m > n$. Escreva sobre este problema, considerando os aspectos:

   - existência e unicidade de solução ;
   - interpretação geométrica;
   - formas de resolução .

---

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e considere sua decomposição SVD: $A = U \sum V^T$.

   (a) Mostre que $x = A^+ b$ é a solução de norma–2 mínima de problema de quadrados mínimos

   $$Min\|Ax - b\|_2,$$

   onde $A^+$ é a pseudo–inversa de $A$.

   (b) Mostre que $||A||_F^2 = \sigma_1^2 + \cdots \sigma_r^2$, onde $\sigma_i > 0$, para $i = 1, \cdots, r$, é valor singular de A.

   (c) Suponha $m = n$. Qual a relação entre os autovalores e os valores singulares de $A$?

---

4. Seja $A$ matriz $n \times n$ e sejam $\lambda_1 >, \lambda_2 \geq, \ldots, > \lambda_n$ seus autovalores.

   (a) Descreva como se pode ter uma estimativa de onde os autovalores de $A$ estão localizados.

   (b) Descreva detalhadamente o método das potências e suas variações para estimar:

   - o maior autovalor de A;
   - o menor autovalor de A;
   - qualquer autovalor de $A$.

   Justifique o que fizer nos dois itens.

---

*Boa Prova!!!*

# MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

**Nome:** ______________________________ **RA:** ________________

**Exame de Qualificação** (12/03/2010)

1. Explicar o **método das restrições ativas** para o seguinte problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & Ax \le b, \end{array}$$

em que $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ é suave, $A \in I\!\!R^{p\times n}$ e $b \in I\!\!R^p$. Escrever as idéias principais, analisar os passos e justificar. A avaliação se baseará na apresentação precisa das idéias e na clareza dos conceitos.

---

2. Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + b^Tx$ com $Q = Q^T \in I\!\!R^{n\times n}$ definida positiva, $b \in I\!\!R^n$ e sejam

$$\boxed{z^\star = \underset{\lambda \in I\!\!R}{\text{arg min}} \;\; f(\widehat{x} + \lambda d)} \quad \text{e} \quad \boxed{y^\star = \underset{\lambda \in I\!\!R}{\text{arg min}} \;\; f(\widetilde{x} + \lambda d)}$$

com $d \neq 0$, $\widehat{x} - \widetilde{x} \neq \alpha d$, sendo $\alpha$ escalar real.

(a) Se $z^\star = \widehat{x} + \lambda^\star d$, determinar $\lambda^\star$.

(b) Sejam $r = z^\star - y^\star$ e $\boxed{w^\star = \underset{\lambda \in I\!\!R}{\text{arg min}} \;\; f(\widehat{x} + \lambda r)}$.

Mostrar que $\boxed{w^\star = \underset{\alpha \in I\!\!R, \beta \in I\!\!R}{\text{arg min}} \;\; f(\widehat{x} + \alpha d + \beta r)}$ e comentar o resultado.

---

3. Dadas $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ e $h : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ funções suaves, definimos o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0, \end{array} \tag{1}$$

e o reformulamos como

$$\underset{x \in I\!\!R^n}{\text{minimizar}} \quad f(x) + \rho\|h(x)\|_2. \tag{2}$$

Seja $x(\rho)$ o minimizador global de (2).

(a) Se $x(\rho) \to x^\star$, provar que $x^\star$ é minimizador global de (1).

(b) Sob as hipóteses do item (a), provar ou dar um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Existe $(\lambda_1^\star, \ldots, \lambda_m^\star)$ tal que $\nabla f(x^\star) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^\star \nabla h_j(x^\star)$.

---

4. Provar ou dar um contra-exemplo: se a matriz $\nabla^2 f(x^\star)$ é definida positiva e $x^\star$ é um ponto estacionário de $\min f(x)$ s.a $h(x) = 0$ então $x^\star$ é um minimizador local deste problema.

---

5. Seja $\mathcal{S} \equiv \{x \in I\!\!R^n \mid Ax = b, x \ge 0\}$ não vazio, com $A \in I\!\!R^{m\times n}$ e $b \in I\!\!R^m$. Seja $0 \le z \in I\!\!R^n$ tal que $A^T(Az - b) = \gamma \ge 0$ e $z^T\gamma = 0$. Provar que $Az = b$.