EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE ANÁLISE APLICADA- Março 2007

NOME:

RA:

Resolva cinco exercícios, sendo dois da Parte I e três da Parte II .

- **Parte I**

1. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos isométricos. Mostre que (X_1, d_1) é completo se e somente se (X_2, d_2) é completo.

2. Mostre que se um espaço normado X tem uma base de Schauder, então X é separável.

3. Seja $X = \{x \in R,\ x \geq 1\}$ e seja a aplicação $T : X \to X$, $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
   a) Mostre que T é uma contração (na métrica usual de R).
   b) Para $x_0 \in X$ qualquer, defina $x_{k+1} = T(x_k)$. O que se pode afirmar sobre a convergência da sequência (x_k)? Justifique sua resposta.

4. Seja X o espaço das funções reais limitadas $x(t)$, $t \in [0, 1]$. Considere a norma dada por

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [a, b]\}.$$

   Defina

$$B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}.$$

   B é compacto? Se sua resposta é afirmativa, prove. Em caso contrário, exiba um subconjunto infinito sem pontos de acumulação e justifique cuidadosamente.

- **Parte II**

1. Para $-\infty < a < b < \infty$, considere o espaço vetorial normado $(C[a, b], ||.||_\infty)$. Dados n pontos dintintos $x_k \in [a, b]$ e coeficientes $\alpha_k \in R$, defina $F : C[a, b] \to R$ tal que $F(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$. Prove que F é um funcional linear limitado e $||F|| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$.

2. a) Considere o operador $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ definido por $y = (\eta_j) = T(x)$, $\eta_j = \frac{\xi_j}{j}$, $x = (\xi_j)$
   a) Prove que T é um operador linear limitado e injetivo.
   b) Mostre que o operador inverso $T^{-1} : Im(T) \to \ell^\infty$ não é contínuo.

3. Seja (e_n) um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert. Mostre que (e_n) é total se e somente se vale a identidade de Parseval.

4. Sejam $T_n : H \to H$ operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert.
   a) Supondo que $T_n \to T$, prove que $T_n^* \to T^*$.
   b) Se T_n são operadores auto-adjuntos, prove que T também é auto-adjunto.

Boa prova!

Questão 1: (2 pontos) Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

(a) $\|A\|_F = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F}$.

(b) A matriz $m \times n$. $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda}$, onde λ é o maior autovalor de $A^T A$ em módulo.

(c) Se A é anti-simétrica, então $I + A$ é não-singular.

(d) Se A é anti-simétrica de ordem ímpar, então A é singular.

Questão 2: (2 pontos) Uma matriz da forma abaixo é chamada 3-cíclica.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & F \\ H & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Expresse os autovalores de B em termos de autovalores de uma certa matriz que depende das matrizes E, F e H.

Questão 3: (2 pontos) Seja

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & -F_2 & & & & \\ -E_2 & D_2 & -F_3 & & & \\ & -E_3 & D_3 & -F_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & D_{m-1} & -Fm \\ & & & & -E_m & D_m \end{bmatrix},$$

onde os blocos D_i's são matrizes não-singulares, não necessariamente diagonais.

(a) Quais são as matrizes (por bloco) de iteração de Jacobi e Gauss-Seidel para sistemas lineares que têm A como matriz de coeficientes?

(b) Justifique por que os métodos estão bem definidos para as matrizes especificadas em (a).

Questão 4: (2 pontos) Seja A $m \times n$, com posto$(A) = n$.

(a) Deduza como o problema de quadrados mínimos associado ao sistem $Ax = b$ recai no sistema normal.
Sugestão: investigue condições de primeira e segunda ordens.

(b) Discuta a possibilidade de usar o método de Cholesky para resolver o sistema normal neste caso.

Questão 5: (2 pontos) Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $A = xy^T$. Qual a decomposição em valores singulares de A?

Métodos Computacionais de Otimização - primeiro semestre de 2007

Exame de qualificação

Esse exame é composto por cinco questões, das quais você deve responder quatro à sua escolha.

1. Considere o problema

$$\min\ 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11.$$

a) Encontre um ponto que satisfaça as condições necessárias de primeira ordem para esse problema.

b) Mostre que esse ponto é um mínimo global.

c) Suponha que vamos resolver o problema aplicando o método da máxima descida, a partir do ponto (x, y) = (0, 0). Indique o número máximo de iterações que o método levará para encontrar a solução global.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Seja $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$ a solução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \nabla f(x)^T d \\ \text{suj a} & Ad \leq 0 \\ & \|d\|_2^2 \leq c \end{array}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$, posto(A) = m e c é uma constante positiva.

a) Escreva as condições de otimalidade do problema dado acima.

b) Interprete geometricamente este problema.

c) Prove que $\nabla f(x)^T \tilde{d} \leq 0$.

3. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{suj a} & Ax = b, \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ e posto(A) = m. Seja $\overline{p}$ a solução de

$$\begin{array}{ll} \min & \|\nabla f(x) - p\|_2 \\ \text{suj a} & Ap = 0. \end{array}$$

Encontre a solução $\overline{p}$ e interprete-a geometricamente.

4. Para o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{suj a} & h(x) = 0, \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f, h \in C^1$, considere a função de penalização

$$\phi(x) = f(x) + \lambda(x)^T h(x) + \mu\, h(x)^T C(x) C(x)^T h(x),$$

onde $C(x) = [\nabla h(x) \nabla h(x)^T]^{-1} \nabla h(x)$, $\lambda(x) = C(x)\nabla f(x)$, μ é um escalar positivo e $\nabla h \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é a matriz Jacobiana de h, com os vetores gradientes $\nabla h_i(x)$ transpostos nas linhas.

a) Apresente condições que garantam que a matriz C(x) esteja bem definida.

b) Explique o significado da expressão que define $\lambda(x)$.

c) Mostre que $\phi(x)$ pode ser expressa por $\phi(x) = f(x) + \pi(x)^T h(x)$, onde $\pi(x)$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\mu\, d^T d + \nabla f(x)^T d \\ \text{suj a} & \nabla h(x) d + h(x) = 0. \end{array}$$

d) Sugira como definir $\phi(x)$ para problemas com restrições de desigualdade.

5. Seu objetivo é escolher um método para resolver um problema não linear geral, com restrições (não lineares) de igualdade e desigualdade. Aponte dois possíveis métodos, com filosofias distintas, e discuta os prós e os contras de cada um deles.

Métodos Computacionais de Otimização - primeiro semestre de 2007

Exame de qualificação

Esse exame é composto por cinco questões, das quais você deve responder quatro à sua escolha.

1. Considere o problema

$$\min \; 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11.$$

a) Encontre um ponto que satisfaça as condições necessárias de primeira ordem para esse problema.

b) Mostre que esse ponto é um mínimo global.

c) Suponha que vamos resolver o problema aplicando o método da máxima descida, a partir do ponto (x, y) = (0, 0). Indique o número máximo de iterações que o método levará para encontrar a solução global.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Seja $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$ a solução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \nabla f(x)^T d \\ \text{suj a} & Ad \leq 0 \\ & \|d\|_2^2 \leq c \end{array}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, posto(A) = m e c é uma constante positiva.

a) Escreva as condições de otimalidade do problema dado acima.

b) Interprete geometricamente este problema.

c) Prove que $\nabla f(x)^T \tilde{d} \leq 0$.

3. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{suj a} & Ax = b, \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ e posto(A) = m. Seja $\overline{p}$ a solução de

$$\begin{array}{ll} \min & \|\nabla f(x) - p\|_2 \\ \text{suj a} & Ap = 0. \end{array}$$

Encontre a solução $\overline{p}$ e interprete-a geometricamente.

4. Para o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{suj a} & h(x) = 0, \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f, h \in C^1$, considere a função de penalização

$$\phi(x) = f(x) + \lambda(x)^T h(x) + \mu\, h(x)^T C(x) C(x)^T h(x),$$

onde $C(x) = [\nabla h(x) \nabla h(x)^T]^{-1} \nabla h(x)$, $\lambda(x) = C(x)\nabla f(x)$, μ é um escalar positivo e $\nabla h \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz Jacobiana de h, com os vetores gradientes $\nabla h_i(x)$ transpostos nas linhas.

a) Apresente condições que garantam que a matriz C(x) esteja bem definida.

b) Explique o significado da expressão que define $\lambda(x)$.

c) Mostre que $\phi(x)$ pode ser expressa por $\phi(x) = f(x) + \pi(x)^T h(x)$, onde $\pi(x)$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\mu\, d^T d + \nabla f(x)^T d \\ \text{suj a} & \nabla h(x) d + h(x) = 0. \end{array}$$

d) Sugira como definir $\phi(x)$ para problemas com restrições de desigualdade.

5. Seu o bjetivo é es colher u m m étodo p ara r esolver um problema não linear geral, com restrições (não lineares) de igualdade e desigualdade. Aponte dois possíveis métodos, com filosofias distintas, e discuta os prós e os contras de cada um deles.

Questão 1

Considere operadores diferenciais parciais dos seguintes tipos

$$L_1 = v(x) \cdot \nabla + k(x) = v(x) \cdot \partial_x + k(x) = v(x) \cdot grad + k(x)$$
$$L_2 = D(x)\nabla = D(x)\partial_x = D(x)grad$$
$$L_3 = divL_2 + q(x)$$
$$L_4 = \sum_j A_j(x)\partial_{x_j}$$

onde $x \in \Omega \subseteq R^n, D(x)$, $q(x)$ e $k(x)$ são funções reais, $v(x) \in R^n$ uma função **vetorial** real e $A_j(x)$ **matrizes** reais, todas as funções tantas vezes diferenciaveis quanto necessário ou, desejável.

A)

Restringindo apropriadamente o conjunto F de "*funções da variável x*" em Ω por meio de condições homogêneas de fronteira, descreva **TRÊS modelos matemáticos distintos** (por exemplo: difusão, propagação, transporte.... etc.) **com a interpretação respectiva de cada termo e condição** (i.e., coeficiente de difusão, Fluxo nulo, Decaimento...etc.**)**, que possam ser representados por uma equação evolutiva do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x)$$
$$u(t,.) \in F$$

para L escolhido dentre os tipos $L = L_1, L_2, L_3, L_4$.

B)

Faça o mesmo para

$$Lu = f(x)$$
$$u \in F$$

OBSERVAÇÃO: O conjunto Ω pode ser limitado com fronteira suave ou pode ser todo o R^n com "fronteira no infinito", mas, **ATENÇÃO**: $n > 1$.

Questão 2

Obtenha uma solução "explícita" do problema

$$\begin{cases} (\partial_t + c\partial_x)u = -u & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = H(x) - H(x-1) \end{cases}$$

onde c é uma constante positiva, e H a função de Heaviside,

$$\begin{cases} H(x) = 1 & x \geq 0 \\ H(x) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

e interprete o resultado como propagação de um sinal.

Questão 3

a)Obtenha, por qualquer método (transformadas integrais, similaridade, superposição, etc.) a **solução fundamental** "*explícita"* da equação de difusão, que resolve o modelo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

Com base nesta solução escreva**, comentando suas motivações em cada etapa**, as soluções "*explícitas*" para os seguintes problemas:

b)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ u(x,0) = \sum_{1\leq k\leq n} N_k\delta(x - x_k) \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Questão 4

Enuncie pelo menos **2** (DOIS) dos teoremas citados abaixo:

1-Teorema de Frobenius-Kelvin- (Existencia de soluções para o sistema de EDPs : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F(x)$, $\varphi : \Omega \subset R^n \to R, F : \Omega \subset R^n \to R^n$)

2-Teorema de Euler-Liouville- (Sobre a expressão para a taxa de variação de transporte $\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx$, $x \in R^n$)

3-Teorema de Cauchy-Kowalevskaya

4-Teorema do Valor Médio para funções harmônicas $u(x)$ ($\Delta u = 0$).

5-Teorema do Máximo para soluções dependentes do tempo de equações de difusão.

6-Teorema de Dirichlet- Princípio Variacional -

7-Teorema de Fourier -Transformada direta e inversa.

8-Teorema de Steklov- (Realidade dos autovalores e ortogonalidade das autofunções do operador de Laplace em espaço adequado)

9-Teorema de Hamilton-Jacobi-(Soluções da equação de Hamilton-Jacobi: Caso Quasilinear: $\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,u) \cdot \nabla u = 0$)

10-Teorema de Cauchy-Riemann-(Representação complexa de soluções da equação de Laplace).

11-Teorema de Poisson-(Representação da solução do problema de Dirichlet no disco unitário plano).

Programação Linear - Exame de Qualificação - 16/03/07

Questão 1: As equações básicas abaixo são de um problema de maximização e todas as restrições do tipo " $\leq$":

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - x_2 - 2x_4 - x_6 \\
x_3 &= \frac{3}{2} - 0x_2 - x_4 - 4x_6 \\
x_5 &= 1 + 2x_2 + x_4 - 6x_6 \\
z &= \theta + 0x_2 - 2x_4 - 5x_6
\end{aligned}
$$

1. Dê a solução primal ótima.
2. Dê a solução dual ótima.
3. Dê $\frac{\partial z}{\partial b_1}$. Interprete este número.
4. Ache o valor de θ.

Questão 2: Uma empresa fabrica 3 tipos de doces. Cada doce é feito exclusivamente de açúcar e chocolate. A composição de cada doce, bem como seu lucro é dado abaixo:

	Qtde de Açúcar	Qtde de chocolate	Lucro
Doce 1	1	2	3 centavos
Doce 2	1	3	7 centavos
Doce 3	1	1	5 centavos
Disponibilidade	50g	100g	

Definindo x_i como o número de doce do tipo i produzido, o modelo abaixo representa o PPL que maximiza o lucro satisfazendo as restrições de disponibilidade de açúcar e chocolate:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize } z &= 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\
\text{sujeito a } & \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\
& \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \\
& \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Pede-se:

1. Dê o dual do problema acima.
2. Dê a solução primal do problema.
3. Dê a solução dual do problema (sem resolver o problema dual).
4. Para quais valores de lucro do Doce 1, a solução encontrada em (2) continua sendo ótima?
5. Se 60 g de açúcar estivesse disponível, qual seria o lucro da empresa?
6. Suponha que o Doce 1 usasse apenas 0.5 unidades de açúcar e 0.5 unidades de chocolate. A empresa iria produzir o Doce 1?

7. A empresa está considerando a possibilidade de fazer um doce do tipo 4. Este doce daria um lucro de 4 centavos e necessitaria de 3 gramas de açúcar e 4 gramas de chocolate. A empresa iria produzir este novo doce?

Questão 3: Nesta questão considere como padrão o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s. a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m.

1. Encontre o dual deste problema.

2. Apresente as condições que um ponto necessita satisfazer para que seja:

   (a) primal interior

   (b) dual interior

   (c) primal interior factível

   (d) dual interior factível.

3. Mostre que o *gap* $\gamma \equiv c^t x - b^t y$ se reduz a $\gamma = z^t x$ para um ponto primal e dual factível.

Questão 4: Considere o método primal-dual afim escala.

1. Aponte uma vantagem importante deste método com relação aos métodos primal afim escala e dual afim escala.

2. Aponte a principal desvantagem deste método e mostre como ela pode ser facilmente superada obtendo um método do tipo primal-dual eficiente.

Exame de Qualificação de Análise Numérica – 16/03/2007

1ª Questão: (4.5 pontos)

Um modelo para reações químicas *two way* $w_1 \xrightarrow{k_1} w_2 \xrightarrow{k_2} w_1$ é o sistema

$$\begin{aligned} w_1'(t) &= -k_1\, w_1(t) + k_2\, w_2(t) \\ w_2'(t) &= k_1\, w_1(t) - k_2\, w_2(t) \end{aligned}$$

com constantes de reação $k_1, k_2 > 0$.

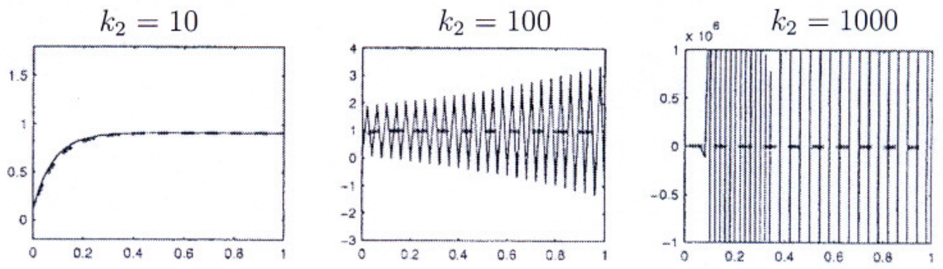
(a) Mostre que a solução deste sistema é

$$\vec{w}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ k_1/k_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(k_1+k_2)t}.$$

(b) Como encontrar c_1 e c_2?

(c) Apresente um algoritmo para cálculo de aproximações de $\vec{w}(t_i)$ com base num método explícito de segunda ordem.

(d) Se $\vec{w}(0) = (0.1,\ 0.9)^T$, $k_1 = 1$ e $\Delta t = 0.02$ o método de Euler forneceu aproximações para $w_1(t)$ apresentados na figura abaixo. Justifique estes resultados.



Resultados obtidos usando o método de Euler com $\Delta t = 0.02$ (linha sólida); solução exata (linha tracejada).

(e) Que alternativa você recomenda para obter melhores resultados, ainda com $\Delta t = 0.02$ no caso $k_2 = 100$ e $k_2 = 1000$?

(f) O que é um problema de valor inicial *stiff*? Exemplifique.

2ª Questão: (3 pontos)

Considere o esquema de Lax-Friedrichs

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(u_{k+1}^n - f(u_{k-1}^n)\right]$$

para a lei de conservação

$$u_t + f(u)_x = 0\ .$$

(a) Mostre que o esquema é consistente.

(b) Mostre que o esquema é conservativo.

(c) Pode-se afirmar alguma coisa sobre a convergência do método?

(d) Pode-se afirmar alguma coisa sobre a convergência no caso $f(u) = au$, $a > 0$ e constante?

3ª Questão: (2.5 pontos)
Dado o esquema de diferenças finitas, consistente com a EDP $\mathcal{P}u = 0$,

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{4(\Delta x)^2}\left(\delta_x^2 v_m^{n+1} + 2\delta_x^2 v_m^n + \delta_x^2 v_m^{n-1}\right), \qquad (*)$$

onde $\delta_x^2 v_m^n = v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n$.

(a) Calcule o polinômio de amplificação associado ao esquema (*).

(b) Mostre que o esquema é incondicionalmente estável.

(c) O que se pode dizer a respeito da convergência da solução obtida usando o esquema (*) para a solução da EDP $\mathcal{P}u = 0$. Justifique.

Boa Prova !