Exame - Análise Numérica

Aluno: RA:

Questão 1

Seja o seguinte problema de valor de contorno:

PVC: Dado um domínio quadrado unitário $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1}$$

satisfazendo a condição de contorno $u(x,y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega$.

Apresente o clássico esquema de diferenças finitas de cinco pontos para a resolução deste PVC, analisando com detalhes sua consistência, estabilidade e convergência utilizando a norma 2.

Questão 2

Seja o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$u' = f(u),\ 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta \tag{2}$$

onde $f(u)$ é Lipschitz contínua. Um método linear de r passos para a solução deste PVI pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}) \tag{3}$$

com $\alpha_r = 1$.

a) Qual a condição para que o método (3) seja explícito?

b) Mostre que o método (3) será consistente se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j$$

c) Defina estabilidade zero para o método (3).

Questão 3

Mostre que a aproximação de Euler explícito no tempo combinada com a diferença centrada de segunda ordem para a derivada no espaço conduz a aproximações instáveis para a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

e apresente um método estável, com a respectiva análise de estabilidade para sua solução.

Bom exame!

Apêndice

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ onde ρ denota o raio espectral.
- $u_{ij}^{p,q} = \sin(p\pi i h)\sin(q\pi j h)$
- $\lambda_{p,q} = \dfrac{2}{h^2}\left[(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)\right]$

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 11/03/2016

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Suponha que a dinâmica uma certa população N depende da quantidade R de recursos disponíveis conforme a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha R - \beta), \tag{1}$$

em que α, β são ambos positivos. Suponha também que os recursos são não-biológicos e, portanto, não estão sujeitos a nascimento ou morte. Além disso, vamos assumir que o total de recursos $C > 0$ é constante. Dessa forma, podemos descrever a quantidade de recursos disponíveis como uma função da população N através da equação

$$R = C - \lambda N, \tag{2}$$

em que $\lambda > 0$ está relacionada a quantidade de recursos consumidos pela população.

(a) Mostre que (1) pode ser escrita como a equação logística (crescimento de Verhulst). Determine a taxa de crescimento r e capacidade de suporte do ambiente K em termos dos parâmetros α, β, γ e C.

(b) Determine o menor valor de C para o qual a população não extingue.

Questão 2. O peso $p(t)$ de um peixe no instante de tempo t pode ser descrito pela equação de von Bertalanffy

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p, \tag{3}$$

em que $\alpha > 0$ é a constante de anabolismo (transformação de alimentos em substância incorporada nas células) e $\beta > 0$ é a constante de catabolismo (transformação de compostos orgânicos em resíduos com liberação de energia).

(a) Identifique os estados estacionários, caracterizando-os em termos de estabilidade.

(b) O ponto de inflexão t^* de $p(t)$ como função dos está associado com a época de desova do peixe. Uma política de pesca consiste em devolver o peixe ao *habitat* quando seu peso é menor que $p^* = p(t^*)$. Determine p^* como função dos parâmetros α e β.

(c) Sabendo que o pacu na fase adulta pesa em média 10,5Kg, mostre que o período de desova ocorre quando o peixe pesa em torno de 3Kg.

Boa Prova!

Exame de qualificação -Combinatória Enumerativa 11/03/2016

NOME:

RESOLVER 4 DENTRE AS 8 QUESTÕES ABAIXO

1- Seja n um inteiro positivo. Mostrar que o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes é igual ao número de partições de n em partes maiores do que 1 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes.

2- Mostar que o número de aplicações sobrejetoras de um conjunto com n elementos em conjunto com k elementos é igual a

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n. \tag{1}$$

3- Considere um grupo G e X o conjunto dos elementos de G. Defina a ação conhecida por conjugação e mostre que ela satisfaz os axiomas que definem uma ação de grupo.

4- Provar combinatóriamente a seguinte identidade:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k q^{k(k+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}=\prod_{i=1}^{\infty}(1+xq^i) \tag{2}$$

5- Mostrar que se um grupo G age em um conjunto X então, para cada $x \in X$, o estabilizador de x, S_x, é um subgrupo de G.

6-Quantos são os diferentes padrões que se pode obter pela coloração de um tabuleiro (4x4), preto e branco, de tal forma que se tenha exatamente 5 quadrados com a cor branca e 11 com a cor preta? (considere o grupo das 8 simetrias do quadrado).

7- Calcular as ordens dos elementos do grupo de simetrias de um pentágono.

8- Dar algum resultado sobre os polinômios de Gauss incluindo uma interpratação combinatória. Fornecer a correspondente demonstração.

Exame de Qualificação em Matrizes - 09/03/2016

Resolva 4 das 5 questões abaixo

---

1. Considere a matriz A de dimensão $n \times n$ particionada na forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

   onde A_{11} é não singular com dimensão r. Denote por S o complemento de Schur de A_{11} em A. Demonstre que A é não singular, se e somente se, $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ é não singular. Sugestão: escreva a fatoração LU de A em função das submatrizes A_{ij}.

2. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ não singular. Suponha que já foram implementadas rotinas para resolver sistemas triangulares superiores, calcular a decomposição QR de A (usando $4/3n^3$ FLOPS) e rotinas auxiliares para avaliar os produtos matriz vetor Qx e $Q'x$ (em $O(n^2)$ FLOPS cada uma).

   (a) Descreva um algoritmo o mais eficiente possível que utilize essas rotinas e calcula A^{-1}.

   (b) Qual é o número total de FLOPS do algoritmo acima?

   Obs: Pense um pouco como explorar a forma das colunas da identidade, I, para poupar nas contas.

3. Considere $Ax \approx b$, onde a matriz A tem posto completo com dimensão $m \times n$ e $m > n$.

   (a) Faça o desenvolvimento teórico do método mais eficiente (rápido) para resolver esse problema.

   (b) Se a matriz A não tiver posto completo qual método você usaria? Justifique.

4. Considere uma matriz quadrada A de dimensão n. Mostre como usar o método das potências e suas variações para calcular:

   (a) O maior autovalor em módulo dessa matriz.

   (b) O menor autovalor em módulo dessa matriz.

   (c) O seu autovalor mais próximo de um valor dado σ.

   (d) O autovetor correspondente ao item acima.

5. Considere uma matriz A de dimensão $m \times n$ na forma

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

   em que A_1 é uma matriz $n \times n$ inversível e A_2 é uma matriz qualquer de dimensão $(m-n) \times n$. Prove que $\|A^+\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2$, em que A^+ denota a pseudo-inversa de A.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO – Programação Linear

11/março/2016

Questão 1: Considere um sistema linear $Ax = b$, $A : n \times n$.
a) Descreva o processo de resolução deste sistema linear através da Fase 1 do Método das Duas Fases (conforme usado no Simplex). Inclua como detectar os seguintes casos:
(i) inconsistência do sistema; (ii) redundância de equações; (iii) solução única.
Mostre como a base inversa da matriz A pode ser encontrada no item (iii).

b) Ilustre no sistema: $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 3 \\ 3x_1 & +5x_2 & & = 5 \end{cases}$

Questão 2: As perguntas abaixo referem-se ao par primal-dual (min-max). Responda dando uma breve justificativa.
a) Se uma solução básica para o primal é infactível e tem um valor da função-objetivo menor que o valor ótimo então a solução dual associada é uma solução factível. Verdadeiro ou Falso?
b) Se o primal é ilimitado então é possível alterar o vetor do lado direito das restrições (usualmente denotado por b) e assim obter um ótimo finito. Verdadeiro ou Falso?

Questão 3: Determine uma solução geral para o seguinte problema:

$$\begin{array}{rll} \text{Maximize} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{sujeito a} & a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n & \leq b \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq 0 \end{array}$$

onde $b > 0$ e $c_j > 0$ para todo j.

Questão 4: Mostre que qualquer direção factível (dy, dz) para o problema dual, abaixo, obedece a relação $dz = -A^t dy$.

$$\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ \text{s. a} & A^t y + z = c \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Questão 5: Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^t x_1 + c_2^t x_2 \\ \text{s. a} & Ax_1 + Bx_2 = b_1, \\ & Cx_2 = b_2, \\ & (x_1, x_2) \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o dual deste problema.
b) Determine as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.
c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método de pontos interiores primal-dual.
d) Encontre o sistema de equações normais através de eliminação de variáveis. Não se preocupe em desenvolver o lado direito das equações.
