Álgebra Linear

Dê exemplos de matrizes A para as quais o número de soluções do sistema linear $Ax = b$ é :
(a) Zero ou um, dependendo de b.
(b) Infinito para qualquer b.
(c) Zero ou infinito, dependendo de b.
(d) Um para todo b.

(a) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quais das opções abaixo são válidas para descrever o conjunto formado pelas soluções de $Ax = 0$? Justifique cada opção assinalada.

(a) Um ponto. (b) Uma reta. (c) Um plano.
(d) Um subespaço de $\mathbb{R}^3$. (e) O espaço nulo de A. (f) O espaço coluna de A.

Exiba uma matriz A e um vetor b tais que as três condições seguintes se cumpram simultaneamente:
(i) Todos os elementos de A são não nulos.
(ii) O sistema linear $Ax = b$ tem infinitas soluções.
(iii) Todas as soluções do sistema linear $Ax = b$ satisfazem $x_1 = 5$.

Exiba um sistema linear de equações que tenha exatamente 5 soluções, ou prove que tal coisa é impossível.

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = b \\ x + ay = 1 \end{cases}.$$

Para cada um dos itens abaixo, pede-se a e b de modo que: (a) O sistema tenha infinitas soluções.
(b) O sistema não tenha solução.
(c) O sistema tenha apenas uma solução.

Prove que a intersecção de dois planos em $\mathbb{R}^3$ não pode estar formada por um único ponto. Que acontece em $\mathbb{R}^4$? Comente todas as formas em que dois planos em $\mathbb{R}^4$ podem se intersecar.

Se A e B são matrizes quadradas não nulas tais que $AB = 0$ (matriz nula) então:
(a) $A = 0$ ou $B = 0$.
(b) A e B são singulares.
(c) $A = 0$ e $B = 0$.
(d) Nada podemos afirmar.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz nilpotente, isto é, $A^n = 0$ para algum inteiro positivo n. Mostre que:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. (b) $\det(I + A) = 1$. (c) Se A é simétrica então $A = 0$.

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:
(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
(b) $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.
(c) $Ax = 0$ implica $x = 0$ se e somente se A é singular.
(d) Se A e B são não singulares então AB é não singular.
(e) Se A e B são singulares então $A + B$ é singular.
(f) Se $x \neq 0$ e $x^T Ax = 0$ então A é singular.

(a) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz idempotente, isto é, $A^2 = A$. Mostre que $I - A$ é singular e que $I + A$ é não singular.

(a) Encontre uma transformação linear $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que Núcleo$(\mathcal{T})$ = Imagem$(\mathcal{T})$.

(b) Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ definida por $\mathcal{T}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$. Encontre o Núcleo e a Imagem de $\mathcal{T}$.

Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial de dimensão 50 e sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ subespaços vetoriais de $\mathbf{V}$ com dimensões 15 e 25, respectivamente. Mostre que:
(a) Dimensão$(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \geq 25$.
(b) $10 \leq$ Dimensão$(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \leq 15$.

Encontre **todas** as matrizes $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tais que as condições abaixo se cumpram simultaneamente:
(i) A é simétrica e singular;
(ii) $a(1,1) + a(3,3) = 2a(1,3)$;
(iii) $(0,1,0)$ é um autovetor associado ao autovalor 1.

(a) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Seja $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p\}$ uma base de um espaço vetorial. Mostre que o conjunto $\{u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, u_1+u_2+\cdots+u_p\}$ também é uma base desse mesmo espaço.

Escreva V (para verdadeira) o F (para falsa) relativamente às afirmações abaixo, provando o que afirmar.
(a) As soluções de um sistema linear homogêneo ($Ax = 0$) formam um subespaço vetorial.
(b) Os vetores de $\mathbb{R}^6$ que têm algum elemento nulo formam um subespaço vetorial.

Cálculo Diferencial e Integral

(a) Represente a região do plano cartesiano limitada pelos gráficos de $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ e $y_3 = \dfrac{4}{x-1}$.

(b) Calcule o valor da área da região representada no ítem (a).

Seja A a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.
(a) Calcule a área de A.
(b) Expresse o perímetro de A em termos de uma integral definida.

Determine os pontos de máximo e de mínimo no intervalo $[-2, 2]$ da função $f(x) = |3x| + |2x - 1|$.

Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$. Calcule a área de R. Expresse o perimetro de R em termos de uma integral definida.

Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = 0.25x(t)(x(t) - 50) \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

<u>Sem</u> resolver a equação diferencial, comente características da solução e esboçe o seu gráfico.

Mostre que $\dfrac{79}{48}$ é uma aproximação de $\sqrt{e}$ ($e = 2.71828\ldots$) com erro absoluto inferior a 0.01 (<u>Sugestão</u>: utilize a série de Taylor de e^x em torno de $x = 0$).

Considere f uma função real, $\{a_n\}$ uma sequência de números reais e $\sum a_n$ a série correspondente. Para cada uma das afirmações abaixo, demonstre as verdadeiras e encontre um contra-exemplo para as falsas:
(a) Se f é diferenciável então f é contínua.
(b) Se f é contínua então f é diferenciável.
(c) Se $\{a_n\}$ converge para 0 então $\sum a_n$ converge.
(d) Se $\sum a_n^2$ converge então $\sum a_n$ converge.
(e) Se $\{a_n\}$ converge e $\{b_n\}$ é limitada então $\{a_n + b_n\}$ converge.
(f) Se $\{a_n\}$ converge para 0 e $\{b_n\}$ é limitada então $\{a_n b_n\}$ converge para 0.

Seja $f : I\!R \to I\!R$, $f \in C^2$ com $f''(x) > 0$ para todo $x \in I\!R$. Seja $[a, b]$ um intervalo em $I\!R$ e seja r a reta tangente a f num ponto $x = c \in [a, b]$. Seja $A(c)$ a área da região compreendida entre a função f e a reta r no intervalo $[a, b]$, isto é,

$$A(c) = \int_a^b [f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)]\, dx\ .$$

Mostre que $c^* = \dfrac{a+b}{2}$ é um minimizador absoluto de $A(c)$, independentemente de f.

Seja $\{x_k\}$ uma seqüência de números reais tal que $\lim_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = 0$. Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $\{x_k\}$ é limitada.
(b) $\{x_k\}$ é convergente.
(c) Se $\{x_k\}$ é limitada então $\{x_k\}$ é convergente.

Seja $f : I\!R \to I\!R$ convexa, isto é, para quaisquer $x, y \in I\!R$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$ temos que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
(a) Interprete geometricamente a desigualdade acima.
(b) Mostre que se f é diferenciável então $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.
(c) Interprete (b) geometricamente.

Seja $f(x) = x \ln x$, definida para todo $x > 0$.
(a) Mostre que a aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x = 0$ é dada por $t_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$.
(b) Encontre $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\int_0^1 f(x)\, dx$.
(c) Esboçe o gráfico de f.

Para todo natural n, $n^3 - n$ é um número:
(a) divisível por 3.
(b) ímpar.
(c) múltiplo de 9.
(d) primo.