Nome:____ CPF:____________________

Importante: clareza e precisão na redação serão muito consideradas na correção.

Parte 1: Cálculo - Resolver as questões C1 e C2 e **escolher uma** entre C3 e C4.

C1. (40 pontos) Considere a função $f(x) = x^2e^{-x}$.

(a - 10) Encontre e classifique todos os pontos críticos de $f(x)$.

(b - 10) Determine os intervalos onde $f(x)$ é decrescente.

(c - 10) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(d - 10) Utilize as informações dos itens anteriores para esboçar o gráfico de $f(x)$.

C2. (40 pontos) Considere as funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = |x|$.

(a - 20) Calcule a área da região delimitada entre os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$.

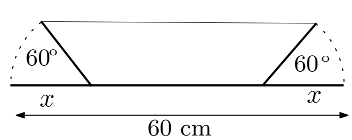
(b - 20) Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x. Considere o sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x. Qual é o volume do sólido obtido?

Atenção: Escolha **somente uma** dentre as questões C3 e C4 para resolver.

C3. (40 pontos) Considere uma sala retangular, cuja planta plana tem dimensões 4×3 metros, representada pelo domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 3\}$. Suponha que a temperatura em cada ponto da sala, em graus Celcius, é descrita pela função $T(x, y) = 4(x-2)^2 + (y-5)^2$. Determine o ponto mais quente e o ponto mais frio dessa sala.

C4. (40 pontos) Uma chapa fina de metal, com 60cm de largura e 3m de comprimento deve ser dobrada de forma a construir uma calha. Especificações técnicas exigem que o ângulo entre a lateral da calha e a horizontal seja igual a 60°.

(a - 20) Determine quantos centímetros devem ser dobrados para que a calha tenha volume máximo.



(b - 20) Se o formato da calha fosse livre, qual seria o maior volume possível, considerando a mesma chapa de metal? Se necessário, faça escolhas e hipóteses adicionais.

Parte 2: Álgebra linear - Resolver as questões A1 e A2 e **escolher uma** entre A3 e A4.

A1. (40 pontos) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 2y - z = 0 \\ bx + y - z = 1 \end{cases}$$

Encontre valores de a e b para os quais o sistema linear acima:

(a - 10pt) Possua solução única.

(b - 10pt) Possua infinitas soluções.

(c - 10pt) Não possua solução.

(d - 10pt) Existem valores de a e b para os quais o sistema tem exatamente 3 soluções? Justifique.

A2. (40 pontos) Considere a seguinte matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a - 20pt) Encontre todos os autovalores e autovetores da matriz A.

(b - 20pt) A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo encontre matrizes P invertível e D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.

Definições (caso real):

- Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ é denominado **autovetor** de A se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $Ax = \lambda x$. Neste caso, o escalar λ é denominado **autovalor** de A.

- Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existir alguma matriz invertível P, tal que $A = PDP^{-1}$.

Atenção: Escolha **somente uma** dentre as questões A3 e A4 para resolver.

A3 (40 pontos) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, 2x - y + t, x - 3y + z).$$

(a - 15pt) Encontre uma base para o núcleo de T e determine sua dimensão.

(b - 15pt) Encontre uma base para a imagem de T e determine sua dimensão.

(c - 10pt) T é invertível? Justifique.

A4 (40 pontos) Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que descreve a reflexão em torno da reta $y = 2x$.

(a - 10pt) Seja $a \in \mathbb{R}$, encontre a imagem do vetor $(a, 3a)$ pela transformação L?

(b - 10pt) Encontre uma matriz A que representa a transformação L em relação a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(c - 20pt) Encontre uma base ordenada, $\{x_1, x_2\}$, para $\mathbb{R}^2$, tal que $L(x_1) = x_1$ e $L(x_2) = -x_2$.