IMECC – UNICAMP 14 de janeiro de 2007

Mestrado Profissional em Matemática

Exame de Admissão

Nome: ____

Identificação: ____

Instruções: Este exame é constituído de duas partes (A e B).

A parte A é composta de 10 questões de múltipla escolha, cujas respostas devem ser preenchidas na tabela abaixo, a qual será utilizada para a correção. O "chute" deve ser evitado, uma vez que duas respostas erradas anulam uma resposta correta.

A parte B consiste de 6 questões dissertativas, cujas soluções devem ser apresentadas logo após os respectivos enunciados, e que só serão corrigidas se for alcançado um desempenho mínimo na parte A.

Não destaque as folhas deste caderno!

Questão (Parte A)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alternativa										

Parte A. Assinale a alternativa correta em cada uma das 10 questões a seguir:

1. Os **valores** máximo e mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 1]$ são:

   (a) 5 e -1.

   (b) 3 e -1.

   (c) 9 e 0.

   (d) 3 e 1.

   (e) Nenhuma das anteriores.

   Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

2. Sabendo-se que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ pode-se afirmar que:

   (a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = 0$.

   (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$.

   (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

   (d) $f(x) \geq g(x)$ para todo x positivo.

   (e) Todas as anteriores são falsas.

   Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

RASCUNHO

3. A equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$ é:

(a) $y - 4 = -(3/5)(x - 3)$.

(b) $4x + 3y = 25$.

(c) $3x + 4y = 25$.

(d) $2x - 4y = 25$.

(e) $3x + 5y = 36$.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

4. As funções a seguir são reais de variável real, ou seja, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dentre as afimações abaixo apenas uma é correta. Qual?

(a) Se f é contínua em $x = a$, então f é derivável em $x = a$.

(b) Se f é derivável, então f é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$.

(c) Se f é contínua em $[a, b]$, então f é derivável em $[a, b]$.

(d) Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$, então $f + g$ pode não ser contínua em $[a, b]$.

(e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

RASCUNHO

5. Deseja-se construir uma cerca retangular beirando um rio com ℓ metros de alambrado (o lado do retângulo que beira o rio não tem alambrado). Quais as proporções entre os lados do retângulo que permitem obter a maior área?

   (a) A medida do lado que beira o rio é três vezes a do lado que é perpendicular a este.

   (b) A medida do lado que beira o rio é $1/3$ da medida do lado perpendicular a este.

   (c) A medida do lado que beira o rio é $1/2$ da medida do lado perpendicular a este.

   (d) A medida do lado que beira o rio é igual à medida do lado perpendicular a este.

   (e) Nenhuma das alternativas anteriores é correta.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + 25y = 1 \\ 4kx + k^2y = 4, \end{cases}$$

onde k é um parâmetro real.

   (a) Existe um único valor de k para o qual o sistema tem infinitas soluções.

   (b) Existem dois valores de k para os quais o sistema tem infinitas soluções.

   (c) Existem três valores de k para os quais o sistema tem infinitas soluções.

   (d) O sistema sempre tem solução, independentemente do valor de k.

   (e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

RASCUNHO

7. Seja $Ax = b$ um sistem de equações lineares com 4 equações e 15 incógnitas.

(a) Este sistema tem exatamente 4 soluções.

(b) Este sistema tem exatamente 15 soluções.

(c) Este sistema não tem solução.

(d) Este sistema tem infinitas soluções.

(e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

8. Seja V o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e sejam v_1, v_2, v_3, três vetores de V, dois a dois linearmente independentes (LI).

(a) v_1, v_2, v_3 são vetores LI.

(b) v_3 é perpendicular ao plano gerado por v_1 e v_2.

(c) v_1, v_2, v_3 podem ser linearmente dependentes (LD).

(d) v_1, v_2, v_3 são sempre LD.

(e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

RASCUNHO

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão, $\mathrm{Dim}(V) = 50$ e sejam U e W subespaços vetoriais de V, com dimensões 15 e 25, respectivamente.

   (a) $\mathrm{Dim}(U + W) \leq 25$.

   (b) $\mathrm{Dim}(U + W) \geq 25$.

   (c) $\mathrm{Dim}(U \bigcap W) \leq 10$.

   (d) $35 \leq \mathrm{Dim}(U + W) \leq 50$.

   (e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

10. Seja $B = \{v_1 \, , \, v_2 \, , \, v_3\}$ uma base para um espaço vetorial V e seja $C = \{w_1 \, , \, w_2 \, , \, w_3\}$, onde $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$ e $w_3 = -v_1 + v_2 + v_3$.

   (a) O conjunto C também constitui uma base para V.

   (b) Os vetores $\{w_1 \, , \, w_2 \, , \, w_3\}$ geram um subespaço de dimensão 2 de V.

   (c) Os vetores $\{w_1 \, , \, w_2 \, , \, w_3\}$ são LD.

   (d) Os vetores $\{w_1 \, , \, w_2 \, , \, w_3\}$ são LI mas não geram V.

   (e) Nenhuma das anteriores.

Assinale a resposta correta e transfira-a para a tabela da primeira página

---

RASCUNHO

Parte B. Resolva as 6 questões a seguir, redigindo detalhadamente suas soluções:

Questão 1) (a) Enuncie o Teorema do Valor Médio (TVM) para funções reais de uma variável real.

(b) Verifique que a função $f(x) = x^3 + x - 1$ satisfaz todas as hipóteses do TVM em $[-1, 1]$ e encontre todos os valores c tais que satisfazem o TVM para esta função neste intervalo.

SOLUÇÃO

Questão 2) Mostre que a equação

$$x \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = x^2$$

tem exatamente duas soluções.

(Sugestão: Analise a função que é a diferença dos dois lados da igualdade acima).

SOLUÇÃO

Questão 3) (a) Uma pessoa encontra-se em um bote no mar, a 2km de distância do ponto P, mais próximo em uma praia, e deseja chegar em uma casa situada à beira-mar, a 6km de P. Se as velocidades com que a pessoa rema e caminha são, respectivamente, 3km/h e 5km/h, determine o tempo mínimo que levará para chegar à casa. Para tanto, suponha que a margem da praia neste trecho seja retilínea, construa a função que modela o problema, e analise-a no intervalo conveniente.

(b) Se a pessoa trocasse o bote por um barco a motor, capaz de navegar a 15km/h, qual a rota que deveria ser feita para chegar à casa em tempo mínimo? Justifique.

SOLUÇÃO

Questão 4) Considere cada uma das afirmações abaixo. Prove as que são verdadeiras e dê um contra-exemplo para cada uma das falsas.

(a) Se A é uma matriz invertível tal que $A^2 = A$, então $A^{-1} = A = I$

(b) Se A e B são matrizes simétricas, então AB também é uma matriz simétrica.

(c) Se A e B são matrizes invertíveis, então AB também é uma matriz invertível.

(d) Se r vetores geram um subespaço de um espaço vetorial então a dimensão deste subespaço é r.

(e) A intesecção de dois subespaços de um espaço vetorial não pode ser vazia.

SOLUÇÃO

Questão 5) Encontre uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja a reta no espaço gerada pelo vetor $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)$.

SOLUÇÃO

Questão 6) A capacidade otimizada de transporte de caixas de formato A, B, C por caminhões de tipos I, II e III é dada pela tabela:

	I	II	III
A	3	3	3
B	10	5	0
C	23	13	3

(a) Encontre valores x, y e z para o número de caminhões de tipos I, II e III de forma que com a capacidade otimizada eles possam transportar exatamente 300 caixas do tipo A, 150 caixas do tipo B e 600 caixas do tipo C.

(b) Discuta se existem outras soluções para o item (a) além dos valores já encontrados.

SOLUÇÃO