AA- EQUA- 100815

ESCOLHA 4 QUESTÕES:

I-Considere $u \in C^{\infty}([0,1] \times [0,1], \mathbf{R})$. Verifique, *justificando sempre*, se a função

$U : [0,1] \to \mathbf{E}$, é contínua, onde $U(t)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - u^2(t,x)$ e nos seguintes casos:

A-$\mathbf{E} = C^{\infty}([0,1], \mathbf{R}), \|.\|_{1,\infty}$, $\|f\|_{1,\infty} = \sup_{0 \le x \le 1}|f(x)| + \sup_{0 \le x \le 1}\left|\frac{df}{dx}(x)\right| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$

B-$\mathbf{E} = C^{\infty}([0,1], \mathbf{R}), \|.\|_2$, $\|f\|_2^2 = \int_0^1 f(x)^2\, dx$

II-Considere $\mathbf{E} = C_p^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) = \{f \in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}\}$ ="*Espaço das funções continuas 2π-periodicas*", $\|.\|_{\infty}$, e $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}$, um subconjunto compacto.

A-Mostre que as funções de **K** são uniformemente limitadas, ou seja, existe M tal que $\|f\|_{\infty} \le M, \forall f \in \mathbf{K}$,

B-Mostre que o funcional oscilação $O_{\delta} : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ $O_{\delta}f = \sup_{x \in R}|f(x) - f(x+\delta)|$ é bem definido e contínuo para cada $\delta > 0$.

C-Mostre que as funções de **K** são *uniformemente contínuas no seguinte sentido*: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$ tal que $O_{\delta}f < \varepsilon$ para **qualquer** $f \in E$.

III-

A-Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental do Cálculo para funções de variável real e valor real.

B-Obtenha uma expressão para a derivada $\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx\right)$, e justifique o seu resultado, onde $a,b \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ e $f \in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$.

C-Mostre que a sequencia de funções $f_n(t) = n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t))$ converge uniformemente em compactos para uma função de $C^{\infty}(R,R)$ a ser determinada, quando $f \in C^{\infty}(R,R)$.

IV–Considere a equação linear $(I - A)x = y$, onde, $A \in L(\mathbf{H})$=\{*Funções lineares limitadas* $A : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$\}, e H um espaço de Hilbert.

A-Mostre que o espaço vetorial $L(\mathbf{H})$ é uma **Álgebra de Banach** com a operação de produto por composição e a norma usual.

B-Mostre que se **A** for "*suficientemente pequeno*" há uma unica solução $x(y,\mathbf{A})$ continua nas **duas** variáveis, y , **A**. (Estabeleça precisamente o significado matematico dos termos empregados).

C-Aplique estes resultados a problemas da forma $\dot{u}(t) = \lambda\int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t)$ estabelecendo as condições adequadas para que a solução seja uma função continuamente diferenciavel $u : R \to C^n$ e $K \in C^0([0,T],C)$.

D-Se $n = 1$ e $K(t,s) = \cos st$ e $f(t) = 1$ obtenha um esquema iterativo, $u_{n+1} = Tu_n$ que apresente convergencia em compactos para a solução do problema $\dot{u}(t) = 1 + \lambda\int_0^t \cos(ts)(u(s))ds$ e obtenha n_0 tal que para $n > n_0$ seja válida a estimativa : $\|u_n - u\|_R \le 10^{-1}$ onde $\|u_n - u\|_R = \sup_{|t| \le R}|u_n(t) - u(t)|$

V-Considere o espaço de funções $H_0 = \{h \in C^{\infty}([0,1],R), h(0) = h(1) = 0\}$.

A-Mostre que a expressão $\langle u, v\rangle_{m,2} = \sum_{k=0}^{k=m}\int_0^1 u^{(k)}(x)v^{(k)}(x)dx$ é um produto interno em H_0 para qualquer $m \geqq 0$.

B-Demonstre a desigualdade $\|u\|_{0,2} \leq C\|u\|_{1,2}$ em que C é uma constante fixa e independente da função $u \in H_0$.

C-Mostre que se $f \in C^{\infty}([0,1], R)$ então a expressão $\lambda(u) = \int_0^1 f(x)u(x)dx$ é um funcional linear limitado em H_0, $\|.\|_{m,2}$

D-Mostre que λ tem uma representação w de Riesz-Fischer no espaço H_0 , $\langle.\rangle_{1,2}$, determinnado **explicitamente/analiticamente** esta função w para $f(x) = 1$.

E-Relacione esta questão com o Problema Variacional de Dirichlet:
$\inf\limits_{\overline{H_0}} \left\{\int \frac{1}{2}(u')^2 + fu\right\}$ e com o Problema diferencial de Dirichlet: $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$,
$u(0) = 0, u(1) = 0$.

VI-Considere o espaço vetorial de funções seccionalmente polinomiais de segunda ordem e continuamente diferenciaveis

$\mathcal{S}_2([0,1], \mathbf{R}) = \{f \in C^1([0,1], R)$, Existem n pontos $x_0 = 0 <\ldots< x_n = 1$, e polinomios

A-Obtenha a dimensão dos subespaços de funções $E(\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}) \subset \mathcal{S}_2([0,1], \mathbf{R})$ definidos na forma
$E(\alpha_0 = 0 <\ldots\ldots< \alpha_n = 1) = \{f \in C^1([0,1], R)$, tal que para $\alpha_0 = 0 <\ldots< \alpha_n = 1, A_k x^2 +$

B-Construa uma função f deste espaço, tal que $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$.

C-Mostre que $\mathcal{S}_2([0,1], \mathbf{R})$ é um subespaço denso em $C^1([0,1], \mathbf{R})$ com a norma $\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{\infty} + \|\frac{du}{dx}\|_{\infty}$ **ou,**

C*-*Descreva um algoritmo* para construir uma função $f \in \mathcal{S}_2([0,1], \mathbf{R})$ tal que $\|f - h\|_{1,\infty} \leq 10^{-n}$ para $h(x) = \cos x$.

VII-Completamento e Extensão

A-Mostre que se $\mathbf{E}_0$ for um subespaço métrico e denso em $\mathbf{E}$, então toda função uniformemente contínua $f : \mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{M}$, onde $\mathbf{M}$ é um espaço completo, admite uma e única extensão contínua $\overline{f} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{M}$.

B-Mostre que a norma e o produto interno, podem ser estendidas de um subespaço $\mathbf{E}_0$ para $\overline{\mathbf{E}_0} = \mathbf{E}$.

C-Mostre que a operação linear $\mathcal{K} : C^0([\mathbf{0},\mathbf{1}], \mathbf{C}) \longrightarrow C^0([\mathbf{0},\mathbf{1}], \mathbf{C})$, definida por $\mathcal{K}[u](x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy$ é limitada entre os respectivos espaços ($C^0([\mathbf{0},\mathbf{1}], \mathbf{C}), \|.\|_2$) e $(C^0([\mathbf{0},\mathbf{1}], \mathbf{C}), \|.\|_2)$ se $K(x,y) \in C^0([0,1]^2, \mathbf{C})$.

D-Mostre que é possível estendê-la para o completamento do espaço $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_2$.

ATENÇÃO:

Qualquer um dos seguintes teoremas que forem utilizados em seus argumentos deve ser **completamente enunciado** & a aplicação deles relacionada ao contexto especifico, ou seja, a **identificação de cada termo (conjunto, função, etc.) na aplicação**. **Sem isto, o argumento será considerado nulo**.

Teoremas: Heine-Borel (continuidade em compactos), Weierstrass (Extremos em compactos), Weierstrass (Aproximação Polinomial), Completamento de Esp. Metricos, Banach (Contração), Paralelogramo (Norma e Produto Interno), Riesz (Projeção), Riesz-Fischer(Representação), Beppo-Levi (Decomposição Ortogonal de Esp. Hilbert),Cauchy-Schwartz (Desigualdade), Neumann (Expansão em series da Perturbação da Identidade), Gram-Schmidt(Ortonormalização), Hahn-Banach(Extensão de funcionais lineares),Banach-Steinhaus (Ressonancia/Conv. pontual Equilimitada), Banach (Aplicação Aberta & Grafico Fechado).

-

Exame de Qualificação em Matrizes - 12/08/2015

Resolva quatro das cinco questões abaixo.

1. Sejam A uma matriz $m \times m$ simétrica definida positiva, B $m \times n$ e C $n \times n$ não singular. Descreva, com detalhes, os passos para resolver o sistema linear abaixo da forma mais eficiente possível. Justifique sua resposta.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. Descreva como as reflexões de Householder e as rotações de Givens podem ser usadas para calcular a decomposição QR de uma matriz.

3. Descreva em detalhes o método QR iterativo para calcular todos os autovalores e autovetores de uma matriz.

4. Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$, $m \geq n$.
(a) Considere a matriz $M = AA^T$.
a1. Mostre que M é simétrica semidefinida positiva.
a2. O que você pode dizer dos autovalores de M? Reais, complexos, nulos, positivos ou negativos?
a3. Mostre a relação entre os valores singulares de A e os autovalores de M.

(b) Suponha que $posto(A) = p < n$ e considere o problema de quadrados mínimos

$$Min_x \|Ax - b\|_2 \quad (QM).$$

b1. Mostre que (QM) tem infinitas soluções, justificando todas as afirmações usadas.
b2. Formule o problema de encontrar a solução x_{QM} de norma-2 mínima de (QM).
b3. Qual o método mais adequado para determinar x_{QM}? Descreva como esta solução pode ser obtida através deste método.

5. Mostre como utilizar o processo de Arnoldi para resolver o sistema linear $Ax = b$ onde A não singular e não simétrica.

MT503 - Programação Linear

Exame de Qualificação - 14 de agosto de 2015

Nome: ______________________________ RA: ______________

Questão 1: Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$
$$\text{s a:} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Formule o problema dual associado.

(b) Resolva o problema dual.

(c) A partir da solução ótima dual, determine uma solução ótima primal.

Questão 2: Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{s a:} \begin{cases} \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 3 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 1 \\ & 4x_2 & & +x_4 & = 5 \end{array} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Escreva o problema auxiliar (Fase I). Determine uma solução básica inicial factível para este problema.

(b) Considere a solução $\bar{x} = (1\ 0\ 2\ 5)^t$. Iniciando em $\bar{x}$, encontre uma solução ótima para o problema usando o método simplex.

Questão 3: Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^t y + z - c = 0 \\ ZXe = \mu e. \end{cases}$$

(a) Elimine z da última equação e substitua na segunda.

(b) Encontre o Jacobiano do sistema resultante.

(c) Encontre o sistema de equações normais através de eliminação de variáveis.

(d) Faça $\mu = 0$ no lado direito e escreva a equação resultante em função de $y + dy$.

(e) Relacione $y + dy$ encontrado com a estimativa de Dikin para variáveis duais.

Questão 4: Considere o problema de regressão L_1

$$\begin{array}{ll} \min & e^t u + e^t v \\ \text{s. a} & Ax + u - v = b, \\ & (u, v) \geq 0 \end{array}$$

onde $A \in \Re^{m \times n}, b, x, u, v, e$ são vetores com as dimensões apropriadas e $m > n$.

(a) Encontre o dual deste problema.

(b) Determine as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.

(c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método de pontos interiores primal-dual.

(d) Encontre o sistema de equações normais através de eliminação de variáveis. Não se preocupe em desenvolver o lado direito das equações.

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 14/08/2015

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Considere um lago com peixes atrativos para pesca. Formule e analise um modelo matemático para a interação peixes-pescadores considerando somente as seguintes hipóteses:

1. *Hipóteses sobre os peixes:*
   (a) Na ausência de pescadores, os peixes possuem um crescimento logístico.
   (b) A presença de pescadores reduz o crescimento dos peixes a uma taxa proporcional a ambas populações de peixe e pescador.
2. *Hipóteses sobre os pescadores:*
   (a) Pescadores são atraídos para o lago a uma taxa diretamente proporcional a quantidade de peixes no lago.
   (b) Pescadores são desencorajados de pescar no lago a uma taxa diretamente proporcional ao número de pescadores que já estão pescando no lago.

Questão 2. Considere o sistema de equações

$$N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t},$$
$$P_{t+1} = cN_t(1 - e^{aP_t}).$$

que descrevem a interação entre parasita P_t e hospedeiro N_t com parâmetros positivos f, a, c.

(a) Determine os estados estacionários do sistema.

(b) Analise a estabilidade dos estados estacionários.

(c) Com base no resultado do item anterior, o que pode ser dito sobre o modelo acima?

Questão 3. O modelo de Lotka-Volterra para duas espécies em competição é dado pelas equações

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \frac{\kappa_1 - N_1 - \beta_{12} N_2}{\kappa_1}, \tag{1}$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \frac{\kappa_2 - N_2 - \beta_{21} N_1}{\kappa_2}, \tag{2}$$

em que N_1 e N_2 representam as densidades populacional das espécies 1 e 2 e $\kappa_1, \kappa_2, r_1, r_2, \beta_{12}$ e β_{21} são constantes positivas. Se

$$\frac{\kappa_2}{\beta_{21}} < \kappa_1 \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_1}{\beta_{12}} > \kappa_2,$$

podem as duas espécies coexistir? Justifique sua resposta.

Questão 4. Apresente um modelo epidêmico determinístico e contínuo no tempo para uma doença de longa duração contendo os seguintes compartimentos: *Suscetíveis* (S), *assintomáticos* (A), *infectados* (I) e *resistentes* (R). Os indivíduos assintomáticos têm comportamento similar aos suscetíveis mas podem disseminar a doença. Suponha uma taxa de natalidade constate e com indivíduos nascendo suscetíveis. Suponha também que a mortalidade dos indivíduos assintomáticos e infectados seja superior a mortalidade dos indivíduos suscetíveis e resistentes. Critique seu modelo e justifique suas decisões.

Questão 5. Discorra sobre um tema de *MT624 – Biomatemática I* que as questões anteriores não abordaram. Justifique sua escolha do tema.

Boa Prova!