UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MT709 – Equações Diferenciais Parciais Aplicadas – 15 agosto 2014

ALUNO	RA

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

MT709 – Equações Diferenciais Parciais Aplicadas – 15 agosto 2014

INSTRUÇÕES

Todas as questões valem 2.0 pontos.

Questão 1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^*$. Considere a equação diferencial do tipo Tricomi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 0.$$

(a) Classifique-a quanto ao tipo;

(b) Reduza-a à forma canônica;

Questão 2. a) Seja $t \in \mathbb{R}$. Calcule a transformada de Laplace de $\mathsf{g}(t) = \operatorname{sen} t$; b) Obtenha a expressão para a transformada de Laplace da derivada $\mathsf{f}'(t)$; c) Resolva a equação integrodiferencial, isto é, obtenha a função $\mathsf{f}(t)$ satisfazendo a equação

$$\mathsf{f}(t) = \operatorname{sen} t + 2\int_0^t \mathsf{f}'(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

e a condição $\mathsf{f}(0) = 0$.

Questão 3. Utilize o método de separação de variáveis para discutir a equação diferencial parcial

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) - 2\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 0,$$

satisfazendo as condições $u(x,0) = 0 = u(x,\pi)$, $u(0,y) = 1$ e $y'(0,y) = 1$.

Questão 4. A temperatura, uma função contínua do ponto M, é denotada por $u(x,y)$. Ela é constante no tempo e satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u = u(x,y)$$

satisfazendo as condições $u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0$. Admita que cada ponto de abscissa x e ordenada 1, tenha temperatura $F(x)$ dada por

$$u(x,1) \equiv F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{100}{2^k}\operatorname{sen}(k\pi x)$$

com $0 \le x \le 1$. a) Calcule $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$ e mostre que $|F(x)| \le 100$, para qualquer x. b) Utilize separação de variáveis para obter $u(x,y)$. c) Dados $\cosh(\pi/2) \simeq 1/0,3985$, $\cosh(3\pi/2) \simeq 1/0,0180$ e $\cosh(5\pi/2) > 1000$, calcule a temperatura no centro da placa. d) Fazendo uso de exponenciais complexas, calcule $F(x)$ e mostre que $0 \le F(x) < 67$.

Questão 5. Determine as temperaturas estacionárias $u(r,z)$ num sólido cilíndrico, limitado pelas superfícies $r = r_0$, $z = 0$ e $z = 1$. Admita que $u(r,z) = 0$ sobre a superfície $r = r_0$; $u(r,z) = 1$ sobre a base $z = 1$ e a base $z = 0$ está isolada.

Formulário, eventualmente, útil

- Série e Coeficientes de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\,\mathrm{d}x$$

- Laplaciano em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}u(r,\theta,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u(r,\theta,z) = 0$$

- Laplaciano em coordenadas polares no plano

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}u(r,\theta) = 0$$

- Teorema dos resíduos e resíduo num polo de ordem k

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \text{Resíduos} \qquad \underset{z=z_1}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_1}\left\{ \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left[(z-z_1)^k f(z)\right]\right\}$$

- Convolução de Laplace

$$f \star g = \int_0^t f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathscr{L}[f\star g] = F(s)G(s)$$

Boa Prova!

Programação Linear - Exame de Qualificação - Agosto/2014

Nome: RA:

1. Considere o problema abaixo, cuja solução ótima é $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.a.} & & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

   (a) Formule o problema dual associado.

   (b) Determine a solução ótima do problema dual sem resolvê-lo usando o simplex ou um método de pontos interiores.

   (c) Quantas são as soluções básicas factíveis ótimas do problema dual? Justifique. Mostre todas elas, indicando as variáveis básicas de cada uma.

2. Considere o problema abaixo:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\min & z = & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 3 \\
 & & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

   (a) Apresente o Problema Auxiliar (Fase I) com variáveis artificiais. Exiba uma solução básica factível inicial para este problema.

   (b) Considere a solução $\bar{x} = (3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 5)^T$. Começando em $\bar{x}$, encontre a solução ótima do problema usando o método Simplex.

3. Considere o problema (P):

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = c^T x \\
\text{s.a.} & \left\{ \begin{array}{r} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

   em que $A : m \times n$, com $posto(A) = m$. Sejam B uma base para (P) e x a solução básica associada. Considere que $y^T = c_B^T B^{-1}$, e que $z_d(y)$ é o valor da função objetivo do problema dual de (P).

   (a) Escreva as condições de otimalidade de **KKT** para o problema.

   (b) y é solução básica para o dual de (P)? Justifique.

   (c) Sob que condições temos $z(x) = z_d(y)$?

4. Considere o problema abaixo e sua solução ótima, x^*, associada à base B^*:

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl} \min & z = & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & \\ \text{s.a.} & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 3 \\ & & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Observe que o coeficiente que multiplica x_2 na função objetivo é $c_2 = 1$. Para que valores de c_2 a solução básica atual, x^*, permanece ótima?

(b) Suponha que o vetor b tenha sido alterado de $(3,\ \ 1)^T$ para $(2,\ \ 4)^T$. Se fosse usar análise de sensibilidade (pós-otimização) para obter a nova solução ótima, você adotaria o método Primal Simplex ou o método Dual Simplex? Justifique.

(c) Altere o vetor b para $(2,\ \ 4)^T$ e encontre a nova solução usando o método que você escolheu no item (b). Exiba os novos x^*, z^* e B^*.

---

5. Suponha que você vá aplicar um algoritmo de pontos interiores (à sua escolha) com o objetivo de resolver o problema:

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{s.a.} & \begin{cases} Ax = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \end{array}$$

(a) Apresente o sistema linear que deve ser resolvido (ou os sistemas lineares que devem ser resolvidos) para a obtenção do vetor direção em uma iteração do método que você escolheu.

(b) Explique como resolver de forma eficiente o sistema apresentado no item (a).

(c) Mostre como o comprimento do passo é determinado a cada iteração do algoritmo.

Exame de Qualificação
Matrizes - MT 402

21 de agosto de 2014

Escolha quatro das questões abaixo.

1. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Quais propriedades a matriz A deve satisfazer para que sua decomposição de Cholesky exista?
   (b) Desenvolva a decomposição de Cholesky de A.
   (c) Explique como a decomposição de Cholesky pode ser usada para resolver o sistema linear $Ax = b$.
   (d) Seja $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, posto$(B) = n$ e a decomposição QR de B: $B = QR$. A matriz R está relacionada com a decomposição de Cholesky de qual matriz?

2. Considere $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, posto$(A) = n$ e o sistema linear $Ax = b$. O sistema linear aumentado é dado por: $By = c$ onde $B = [I\ A; A^t\ 0]$, $y = [r; x]$, $c = [b; 0]$ e I representa a matriz identidade de dimensão m. Mostre que este sistema linear admite solução única e relacione a solução deste sistema y com a solução do problema de Quadrados Mínimos para $Ax = b$.

3. Uma matriz complexa $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é chamada de skew hermitiana se $A^* = -A$.
   (a) Prove que se A é skew hermitiana e B é similar A então B também é skew hermitiana.
   (b) Como ficaria o enunciado do teorema de Schur no caso particular de uma matriz skew hermitiana?
   (c) Usando o enunciado obtido acima mostre que os autovalores de matrizes skew hermitianas são puramente imaginários.
   (d) Apresente uma prova alternativa do enunciado acima baseada no quociente de Rayleigh.

4. (Problema de Procrustes) Nesse problema todas as matrizes que aparecem são quadradas $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dadas matrizes A, B mostre que a matriz ortogonal Q que minimiza $\|A - BQ\|_F$ é a matriz $Q = UV^t$, em que $U\Sigma V^t$ é a decomposição SVD de B^tA. Para isso siga os passos indicados abaixo.
   (a) Usando a definição de norma de Frobenius baseada no traço de uma matriz, $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^tA)}$, prove que para qualquer matriz ortogonal Q

   $$\|A - BQ\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^tA) - 2\,\mathrm{tr}(Q^tB^tA) + \mathrm{tr}(B^tB).$$

   Dica: Lembre que o traço é invariante por transformações de similaridade.

(b) Seja Q uma matriz ortogonal e C uma matriz quadrada qualquer. Prove que

$$\mathrm{tr}(Q^t C) \leq \sum_i \sigma_i,$$

em que $\sigma_i,\ i = 1, \ldots, n$, são os valores singulares de C.

Dica: Os vetores de matrizes ortogonais têm componentes em módulo menor que 1 e se M é uma matriz qualquer e D é uma matriz diagonal $\mathrm{tr}(MD) = \sum_i m_{ii} d_{ii}$.

(c) Use os dois primeiros itens para concluir o resultado.

5. (a) Desenvolva o método iterativo de Jacobi.

   (b) Desenvolva o método iterativo de Gauss-Seidel.

   (c) Enuncie condições que sob as quais cada um desses métodos convergem.