Exame de Qualificação de Análise Aplicada

05 de Agosto de 2013

Nome e RA:

Obs: Resolva 5 questões entre as 7 a seguir. **Prove ou justifique todas** as suas afirmações de maneira clara e objetiva.

1. O espaço de todas as funções polinomiais definidas em um intervalo real fixo, finito e fechado com a métrica do máximo é completo?

2. Se z é um elemento fixo qualquer de um espaço normado X, mostre que $f(x) = \langle x, z \rangle$ define um funcional linear **limitado** f em X. Qual é a norma de f?

3. Mostre que um operador linear limitado $T : H \to H$ em um espaço de Hilbert H tem uma imagem de dimensão finita se e somente se T pode se representado na forma

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \, w_j$$

em que $v_j, w_j \in H$.

4. Considere o chamado Operador de Volterra

$$V: \begin{cases} L_2[0,1] & \to L_2[0,1] \\ f & \mapsto Vf \end{cases}$$

definido por

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   (a) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que $|(Vf)(x)| \leq \sqrt{x}\,\|f\|$

   (b) Deduza então que $\|V\| \leq 1/\sqrt{2}$.

5. Considere o espaço das sequências reais quase nulas

$$X = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \,|\exists \bar{K} \in \mathbb{N}\,|\xi_k = 0\,\forall k \geq \bar{K} \right\}.$$

Dados dois elementos de X, digamos $x = (\xi_k)$ e $y = (\eta_k)$, considere a métrica

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|$$

(X, d) é completo? Observe que $\bar{K}$ não é necessariamente o mesmo para todo x.

6. Considere o operador $S = I + T^*T : H \to H$ em um espaço de Hilbert H onde I é o operador identidade, T é um operador linear limitado e T^* o seu adjunto. O operador inverso $S^{-1} : S(H) \to H$ existe?

7. Seja H um espaço de Hilbert, $E \subsetneq H$ um subespaço vetorial denso em H e $z_0 \in H$, mas $z_0 \notin E$. Mostre que

$$F = \{x \in E \,|\, \langle x, z_0 \rangle = 0\}$$

é um subespaço vetorial próprio fechado de E.

Exame de qualificação -Combinatória
09/08/2013

NOME:

RESOLVER 4 DENTRE AS 8 QUESTÕES ABAIXO

1- Mostar que $p(n)$ é ímpar se, e somente se, o número de partições de n cujas partes são ímpares e distintas é ímpar.

2- Considere um grupo G e X o conjunto dos elementos de G. Defina a ação conhecida por conjugação e mostre que ela satisfaz os axiomas que definem uma ação de grupo.

3- Provar combinatóriamente a seguinte identidade:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^{k(k+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} = \prod_{i=1}^{\infty}(1+xq^i) \tag{1}$$

4- Se um grupo G age em um conjunto X então, par cada $x \in X$, o estabilizador de x, S_x, é um subgrupo de G.

5-Quantos são os diferentes padrões que se pode obter pela coloração de um tabuleiro (4x4), preto e branco, de tal forma que se tenha exatamente 5 quadrados com a cor branca e 11 com a cor preta? (considere o grupo das 8 simetrias do quadrado).

6- Mostar que o número de aplicações sobrejetoras de um conjunto com n elementos em conjunto com k elementos é igual a

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n. \tag{2}$$

7- Calcular as ordens dos elementos do grupo de simetrias de um pentágono.

8- Dar algum resultado sobre os polinômios de Gauss incluindo uma interpratação combinatória. Fornecer a correspondente demonstração.

Exame de qualificação

Profs. Roberto Andreani e Francisco Gomes 09/08/2013

Nome: ______________________________ RA: __________

1. Dado o problema
$$\text{Min} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad s.a \quad (x_1 + x_2 - 2)^2 = 0.$$
   (a) Ache a solução gráfica do problema.
   (b) Para esta solução, vale KKT? Justifique.
   (c) Se aplicamos penalização exata com norma 1, a função fica diferenciável? Existe algum valor do parâmetro de penalização para o qual a solução do problema penalizado seja igual à solução original? Justifique.

2. Seja o problema
$$\text{Min} \quad f(x) \quad s.a \quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, p.$$
   Suponha que $g_i(\bar{x}) = 0, \ \ i = 1, \dots, p.$ e que
$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \mu_p \nabla g_p(\bar{x}) = 0,$$
   em que $\bar{x}$ é um ponto regular, $\mu_i \ge 0, \ i = 1, \dots, p-1, \quad$ e $\mu_p < 0$.
   (a) Supondo que as restrições sejam lineares, ache uma direção fatível de descida a partir de $\bar{x}$.
   (b) Esta situação é a mesma no caso não linear? Em caso positivo, mostrar como achar uma direção fatível de descida a partir de $\bar{x}$.
   (c) É possível dizer a mesma coisa se o ponto $\bar{x}$ não é regular, mas satisfaz a condição de Mangasarian-Fromovitz?

3. Seja o problema
$$\text{Min} \quad \frac{1}{2}((x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2) \quad s.a \quad 0 \le x_1 \le 3, \ \ 0 \le x_2 \le 3, \ \ x_1 + x_2 \le 4.$$
   Resolva-o aplicando o método das restrições ativas, começando do ponto $x = (0, 0)$.

4. Sejam $f : I\!R^n \to I\!R$, $g : I\!R^n \to I\!R^p$, $f, g \in C^2$ e $\widetilde{x} \in \Omega \equiv \{x \in I\!R^n \mid g(x) \le 0\}$ um ponto qualificado. Suponha que existe $\mu \in I\!R^p$, $\mu \ge 0$ tal que $\nabla f(\widetilde{x}) + J_g(\widetilde{x})^T \mu = 0$, $\mu_j g_j(\widetilde{x}) = 0, j = 1, \dots, p$ e a matriz $\nabla^2 f(\widetilde{x})$ é positiva definida em $I\!R^n$. Pode-se dizer que $\widetilde{x}$ é um minimizador local de $f(x)$ no conjunto Ω? Prove ou dê um contra-exemplo.

Exame de Qualificação em Matrizes - 07/08/2013

Questão 1

a) Considere $A : m \times n$, posto$(A) = n$. Demonstre que $\|(A^tA)^{-1}\|_2 = \|A^\dagger\|_2^2$. (Inclua as demonstrações de propriedades e/ou teoremas que forem citados nesta demonstração.)

b) $A : n \times n$ é idempotente se $A^2 = A$. Demonstre que uma matriz idempotente é a Identidade de ordem n ou é uma matriz singular.

c) Considere a matriz $A : n \times n$ e a matriz $G : n \times n$, $G = I_n - ge_k^t$, onde $g : n \times 1$ é tal que: $g_i = 0,\ 1 \leq i \leq k$. Se $B = AG$, obtenha a a relação entre os elementos a_{ij} e b_{ij} sem realizar explicitamente o produto.

Questão 2: Considere a matriz $A : m \times n$, $m > n$, e sua decomposição SVD. Particionando as matrizes U, D e V por $U = [U_s\ U_t]$, $D = [D_s\ 0;\ 0\ 0]$ e $V = [V_s\ V_w]$.

Para $b \in \mathbb{R}^m$, considere o problema de quadrados mínimos: $\min \|b - Ax\|_2$.

a) Quais os valores de s, t, w em função das dimensões e posto de A? Justifique.

b) Relacione as matrizes U_s, U_t, V_s, V_w com os 4 subespaços fundamentais: imagem e núcleo de A e de A^t.

c) Demonstre que as soluções para o problema de quadrados mínimos são da forma:

$y = V_s(D_s)^{-1}(U_s)^tb + V_wz \quad z \in \mathbb{R}^w$.

d) Explique o que representa a solução y de norma–2 mínima para o problema de quadrados mínimos. Qual a representação desta solução de acordo com a notação do item (b). Justifique.

e) A solução y para o problema de QM pode ser única? Justifique.

f) O valor mínimo de $\min \|b - Ax\|_2$ pode ser nulo? Justifique.

Escolha 2 questões entre as questões 3, 4 e 5:

Questão 3: Considere $A : n \times n$, simétrica e não singular e sua fatoração $A = LDL^t$ onde L é triangular inferior com diagonal unitária e D diagonal. Considere a matriz M tal que $LDL^t = MD^{-1}M^t$.

a) Deduza expressão da matriz M em função das matrizes L e D. Qual e estrutura da matriz M?

b) Escreva os elementos da matriz M em função dos elementos de A de modo que a fatoração $MD^{-1}M^t$ possa ser obtida diretamente de A, isto é, sem calcular a matriz L.

Questão 4: Considere $A = uv^t$ onde $u : m \times 1$ e $v : n \times 1$ ambos com norma–2 igual a 1 e com todas entradas positivas.

a) Sabendo que $Q_1 = I - (2/(s^ts))ss^t$ é a matriz de Householder para realizar a primeira etapa do processo da fatoração QR, explicite cada entrada do vetor s e dê uma expressão para $2/(s^ts)$ em função dos vetores u e v e/ou de suas entradas.

b) Quantas etapas do processo de Householder devem ser realizadas para triangularizar a matriz A? Justifique.

c) Qual a estrutura especial da matriz R? Justifique.

Questão 5: Considere o subespaço de Krylov $\mathcal{K}_j(A, b)$ e a relação $AV_j = V_jH_j + H_{j+1,j}v_{j+1}e_j^t$.

a) Escreva o pseudo-código do Método de Arnoldi baseado na relação acima.

b) Explique como este método pode ser utilizado para aproximar autopares da matriz A.

c) Comente o erro cometido na aproximação dos autovalores.

d) O que significa reinicialização nesse contexto?