MATRIZES - 08/08/12

Resolva somente quatro dos cinco exercícios abaixo.

1. Uma variação da decomposição LU de uma matriz não singular consiste na decomposição $A = UL$ onde U é uma matriz triangular superior unitária e L uma matriz triangular inferior.

   (a) Desenvolva detalhadamente o algoritmo da fatoração $A = UL$. Assuma que não é necessário realizar permutações.

   (b) Como você utilizaria a decomposição UL para resolver o sistema linear $Ax = b$?

2. Considere $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, posto$(A) = n$. Demonstre que: se $A = QR$, $Q : m \times n$, $Q^tQ = I$ e $R : n \times n$ triangular superior, então, $A^\dagger = R^{-1}Q^t$.

3. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com um único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ contido no intervalo $[a, b]$. Mostre como utilizar o métodos das potências para encontrar o valor de λ e seu autovetor associado. Descreva detalhadamente o funcionamento deste método.

4. (a) Descreva detalhadamente como a decomposição SVD pode ser usada para resolver o problema de quadrados mínimos envolvendo uma matriz A de dimensão $m \times n$ com $m > n$.

   (b) Explique o que seria a solução de norma-2 mínima, $\hat{x}$.

   (c) Se $\hat{x}$ é solução de norma mínima, então, qualquer outra solução de quadrados mínimos pode ser escrita como $z = \hat{x} + w$ onde w pertence a um subespaço gerado por colunas de umas das matrizes da decomposição SVD de A. Qual é esse subespaço? Justifique.

5. Considere o seguinte Teorema:

   Seja a decomposição SVD de uma matriz A: $A = U\Sigma V^t$ e $A_k = \displaystyle\sum_i^k \sigma_i u_i v_i^t$.

   Então $\sigma_{k+1} = \|A - A_k\|_2 = \min\{\|A - B\|_2 \mid posto(B) = k\}$.

   (a) Demonstre o teorema.

   (b) Interprete este resultado.