**Exame de Qualificação de Análise Aplicada**

08 de Agosto de 2011

**Obs:** Resolva 5 questões entre as 7 a seguir. Justifique todas as suas afirmações de maneira clara e objetiva.

1. Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Mostre que $M$ é compacto se e somente se todo conjunto fechado e discreto em $M$ é finito.
   **Dica**: Um espaço métrico $M$ é compacto se toda sequencia em $M$ tiver uma subsquência convergente.

2. Considere o conjunto $\mathbb{B} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} / f \quad \text{é limitada}\}$. Esse conjunto é separável? Prove sua resposta.

3. Seja $X$ o espaço das sequencias reais *quase-nulas*, isto é

   $$X = \left\{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \,/\, \exists \overline{K} \in \mathbb{N} \quad / \quad \xi_k = 0 \quad \text{para} \quad \forall k \geq \overline{K}\right\}$$

   Dados dois elementos de $X$, $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, considere a métrica $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|$. Mostre que esse espaço métrico $(X, d)$ não é completo.

   **Obs:** Observe que $\overline{K}$ depende de $x$, isto é, para cada escolha do elemento $x$ existe (pelo menos) um $\overline{K} \equiv \overline{K}(x)$.

4. Mostre que existe uma e somente uma função contínua e limitada $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

   $$x(t) = \exp\left(\frac{t}{1+t}\right) + \int_0^t e^{-2s}\, x(st)\, ds, \quad t \geq 0$$

5. Considere o operador $S = (I + T^*T) : H \to H$ em um espaço de Hilbert $H$ onde $I$ é o operador identidade, $T$ é um operador linear limitado e $T^*$ o seu adjunto. Prove que o operador inverso $S^{-1} : S(H) \to H$ existe.

6. Seja $X$ um espaço com produto interno $\langle \quad , \quad \rangle$. Considere um conjunto ortonormal $E_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subset X$ e o subespaço vetorial $Y \subset X$ gerado por $E_n$. Um elemento genérico de $y \in Y$ pode ser escrito como uma combinação linear

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

   (a) Mostre que para a escolha particular dos coeficientes $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ temos que o elemento $z \equiv x - y$ é ortogonal a $Y$, isto é, $z \perp y$.

   (b) Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

7. Considere o Espaço de Hilbert $l^2 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots) \, / \, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$ e o operador $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$T\,(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

   (a) Mostre que $T$ é um operador limitado.

   (b) Mostre que $T$ não é uma aplicação injetora.

   (c) Calcule a norma de $T$.

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO – MATRIZES

10/agosto/2011

Nome: RA:

---

1) Considere $A : n \times n$ não singular e os fatores $L$ e $U$ de $A$ obtidos com estratégia de pivoteamento parcial, tal que: $PA = LU$.
Demonstre que $\text{cond}_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\min_j |u_{jj}|}$. (Demonstre todos os resultados empregados na demonstração).

---

2) Obtenha a decomposição SVD da matriz $C = wz^t$ onde $w : m \times 1$ e $z = n \times 1$ são vetores não nulos.

---

3) Seja $A$ uma matriz $m \times n$, com $m \geq n$, e seja $A = QR$ uma fatoração QR reduzida de $A$.
*a)* Verifique que cada coluna de $A$ é combinação das colunas de $Q$ e de elementos de $R$.
*b)* Mostre que $A$ tem posto $n$ se e somente se todos os elementos diagonais de $R$ são não nulos.
*c)* Supondo que $R$ tenha exatamente $k$ elementos diagonais não nulos, com $0 \leq k < n$, o que se pode concluir sobre o posto de A? É exatamente $k$? Pelo menos $k$? No máximo $k$? Dê uma resposta precisa e demonstre o resultado.

---

4) Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
*a)* Demonstre detalhadamente que $\bar{y} = A^\dagger b$ é a solução de norma–2 mínima para o problema $\min \|b - Ax\|_2$.
*b)* Demonstre que todas soluções $y$ de $\min_x \|Ax - b\|_2$ têm o mesmo resíduo $b - Ay = (I - AA^\dagger)b$.
*c)* Interprete o vetor $\bar{y}$ do item (a) se o vetor $b$ satisfaz: $A^t b = 0$.

---

5) Considere $A : n \times n$, simétrica. Usando normas de matrizes, discos de Gershgorin e o método das Potências, é possível obter (para cada caso) intervalos $I = [a \;\; b]$ que contenham exatamente ou aproximadamente os autovalores de $A$.
*a)* descreva detalhadamente cada um destes processos, demonstrando os resultados empregados. Compare os intervalos obtidos em termos dos limites $a$ e $b$ e dos valores reais $\lambda_{min}$ e $\lambda_{max}$ para o menor e maior autovalor de $A$.
*b)* Suponha que $I$ seja tal que $\lambda_i \in [a \; b]$, $\forall \lambda_i$. Usando esta informação, é possível decidir se $A$ é definida positiva. Por que?
*c)* Se $A$ não for positiva, como modificar $A$ de modo a obter uma matriz $B$ definida positiva?

---

Exame de Qualificação                                                                 Agosto 2011

Doutorado em Matemática Aplicada

## Análise Numérica

1. Considere a equação diferencial parcial $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$ e $t > 0$.

   (a) (1,5 pontos) Discuta a estabilidade do método de diferenças finitas

   $$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\, (1-\theta)\delta_x^2 U_j^n + \theta \delta_x^2 U_j^{n+1} \,\right]$$

   para $\theta$ fixo, $0 \le \theta \le 1$.

   (b) (1,0 ponto) Discuta de que maneira devem ser impostas condições adicionais que tornem o problema bem posto.

   (c) (1,0 ponto) O que se pode afirmar sobre a convergência do método apresentado? Qual é sua ordem da aproximação?

2. Considere a EDP $u_t + 2u_x = 0$, com os dados: $u(x,0) = 1,\ x > 0$ e $u(0,t) = -1, t > 0$ .

   (a) Esboce o gráfico da solução quando t=3.

   (b) Apresente um método numérico adequado ao problema e discuta sua convergencia.

   (c) Esboce o gráfico qualitativo da aproximação esperada em t=3, justificando o comportamento desta aproximação.

3. As equações modificadas, associadas à uma discretização para uma EDP, nos ajudam a entender comportamentos difusivos e oscilatórios que eventualmente aparecem nos resultados numéricos. Escreva o que você sabe sobre estas equações modificadas e apresente um exemplo ilustrativo.

4. Escreva sobre a análise de métodos numéricos para o PVI associado à $u'(x) = f(u)$ comentando sobre as noções de estabilidade e convergência destes métodos

5. Construa um esquema de diferenças finitas para o problema

   $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + f(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(0,y) = 0, & 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,y) = 0, & 0 \le x, y \le 1, \quad x + y = 1. \end{cases}$$

   com $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1\}$.