Exame de Qualificação de Análise Aplicada - Agosto de 2010

Obs 1: Resolva apenas 5 exercícios dos 8 abaixo. Cada exercício vale 2 pontos.

Obs 2:As argumentações não triviais devem ser demonstradas ou justificadas com a citação explícita de teoremas notórios e apropriados.

Questão 1

Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que:

X separável se e somente se $\exists\ Y \subset X$ enumerável tal que, dado $\epsilon > 0$ e dado $x \in X$, $\exists y \in Y$ tal que
$d(x, y) < \epsilon$.

Questão 2

Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) Espaços Métricos e $f : X \to Y$ função contínua.

(a) Mostre que se $A \subset X$ é compacto então $f(A)$ é compacto.

(b) Mostre, com um contra-exemplo, que a inversa não é verdadeira, isto é, mesmo que a afirmação (a) seja válida isto não garante que f seja contínua.

Questão 3

Se d_1 e d_2 são métricas sobre o mesmo espaço X e existem números positivos a e b tais que $\forall x, y \in X$

$$a\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b\, d_1(x, y)$$

então as sequencias de Cauchy em (X, d_1) são as mesmas que em (X, d_2), ou seja, (x_n) é sequencia de Cauchy em (X, d_1) se e somente se é sequencia de Cauchy em (X, d_2).

Questão 4

Se (X, d) é um espaço métrico completo, mostre que $(X, \tilde{d})$ é completo, onde $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$.

Questão 5

Mostre que o conjunto dos números reais R constitui um espaço incompleto com a métrica dada por $d(x, y) = |arctg\, x - arctg\, y|$, para $x, y \in R$.
Sugestão: Mostre que a sequencia $x_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ é uma sequencia de Cauchy mas não converge em $(R,\ d)$.

Questão 6

Seja $C^1[a,b]$ com a norma $\|x\|_A = max\,|x(t)| + max\,|x'(t)|$, com $t \in [a,b]$. Considere o funcional linear $f : C^1[a,b] \to R$ definido por $f(x) = x'(\frac{a+b}{2})$.

a) Mostre que o funcional f é limitado em $C^1[a,b]$ com a norma $\|.\|_A$ definida acima.

b) Mostre que f não é limitada na norma usual de $C^1[a,b]$, isto é, na norma $\|x\| = t \in [a,b] max\,|x(t)|$.

Questão 7

Considere o espaço $C[0,1]$ e os operadores $T, P : C[0,1] \to C[0,1]$ dados por:

Se $x \in C[0,1]$ então: $\quad (Tx)(s) = s\int_0^1 x(t)dt \quad$ e $\quad (Px)(s) = sx(s)$

Mostre que:

(a) Os operadores não comutam, isto é: $TP \neq PT$.

(b) Calcule as normas de TP e de PT.

Questão 8

Em análise, uma condição sufciente usual para a convergência de uma iteração $x_n = g(x_{n-1})$ é que g seja contiuamente diferenciável e

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1.$$

Mostre isto usando o Teorema do Ponto fixo de Banach.

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

Nome: ______________________________________ **RA:** ______________________

Exame de Qualificação (13/08/2010)

1. Formule e resolva algebricamente o problema de encontrar o ponto da curva $x_2 = x_1(3 - x_1)$ que está mais próximo do ponto $(3, 3)$.

---

2. Seja o problema
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & Ax = b, \end{array}$$
em que $f : I\!R^n \to I\!R$, $f \in C^2$, $A \in I\!R^{m\times n}$, posto$(A) = m$. Considere um método iterativo para resolvê-lo que gere uma sequência de pontos viáveis. Supondo conhecido um ponto inicial viável x_0,
   (a) descreva um método nestas condições assumindo disponível uma base para o núcleo de A.
   (b) Idem ao item anterior, mas **sem** usar uma base para o núcleo de A.

---

3. Considere o problema (P):
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & Ax \leq b, \end{array}$$
em que $f : I\!R^n \to I\!R$ é suave, $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^m$ e considere o sistema não linear (S):
$$\nabla f(x) + A^T\mu = 0$$
$$(a_i^T x - b_i)\mu_i = 0, i = 1, \ldots, m$$
em que $A^T = [a_1 \cdots a_m]$. Qual é a relação entre as soluções de (P) e (S)?

---

4. Para o problema
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0, \end{array}$$
em que $f : I\!R^n \to I\!R$, $h : I\!R^n \to I\!R^m$ são funções suaves, considere a função de penalização
$$\Phi(x) = f(x) + \lambda(x)^T h(x) + \mu h(x)^T M(x) M(x)^T h(x),$$
onde $M(x) = [J_h(x) J_h(x)^T]^{-1} J_h(x)$, $\lambda(x) = M(x)\nabla f(x)$, μ é um escalar positivo e $J_h(x) \in I\!R^{m\times n}$ é a matriz Jacobiana de h, com os vetores gradientes $\nabla h_i(x)$ transpostos nas linhas.
   (a) Sob que condições a matriz $M(x)$ está bem definida?
   (b) Qual o significado da expressão que define $\lambda(x)$?
   (c) Mostre que $\Phi(x)$ pode ser expressa por $\Phi(x) = f(x) + \pi(x)^T h(x)$, onde $\pi(x)$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange do problema
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}\mu d^T d + \nabla f(x)^T d \\ \text{s.a} & J_h(x)d + h(x) = 0. \end{array}$$
   (d) Sugira como definir $\Phi(x)$ para problemas com restrições de desigualdade.

---

5. Considere o problema: minimizar $f(x)$ s. a $h(x) = 0$, em que $f : I\!R^n \to I\!R$, $h : I\!R^n \to I\!R^m$ são funções suaves, com minimizador local x^*. Qual a relação entre a linearidade (ou não) das restrições que compõem o conjunto viável e a existência de multiplicadores de Lagrange associados a x^*? Ilustre com exemplos.

EXAME DE QUALIFACAÇÃO – MT402 MATRIZES

11/agosto/2010

Nome: RA:

---

1) Considere cada uma das afirmações abaixo. Se for verdadeira: demonstre. Se for falsa: justifique, enunciando e demonstrando teoremas ou através de contra-exemplos.
(a) Se U é matriz triangular superior não singular, então $cond_\infty(U) \geq \frac{max|u_{ii}|}{min|u_{ii}|}$.
(b) Seja A, $n \times n$, com $det(A)$ não nulo. Então existe a fatoração LU de A e esta é única (L triangular inferior com diagonal unitária e U, triangular superior).
(c) Se G é fator de Cholesky de uma matriz A simétrica, definida positiva, então, existe $\beta > 0$ tal que $|g_{ij}| \leq \beta$ para todo $i,\ j = 1, \ldots\ldots n$.
(d) Seja $A \in I\!R^{m \times n}$. Então $\|A\|_F \leq r\|A\|_2$, onde $r = posto(A)$.

---

2) Considere $u : n \times 1$, $\|u\|_2 = 1$ e $P = uu^t$. Justificando todos os argumentos usados:
(a) faça uma interpretação geométrica da ação das matrizes P, $I - P$ e $I - 2P$ em $v \in \mathbb{R}^n$;
(b) o que podemos afirmar a respeito do posto de cada uma das matrizes do item (a)?

---

3) *(a)* Sejam H uma matriz Hessenberg superior, $n \times n$, e R uma matriz triangular superior, $n \times n$. Mostre que HR é matriz Hessenbeg superior.
(b) Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com autovalores: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ e o método QR iterativo para estimar os autovalores de A. Descreva este método, considerando: motivação e passos de cada iteração. Explique a vantagem e/ou necessidade de previamente reduzir A a uma matriz Hessenberg superior através de transformações ortogonais. Neste caso, explique como realizar esta redução. O resultado do item (a) é importante para este procedimento?

---

4) Dado $s_k \in \mathbb{R}^n$, a matriz $S_k = I - s_k e_k^t$, é denominada uma *matriz de Gauss–Jordan*.
(a) Qual a condição para que, dado um vetor v, exista uma matriz S_k tal que $S_k v$ seja um múltiplo (não nulo) do vetor e_k? Obtenha o vetor s_k tal que $S_k v$ seja um múltiplo (não nulo) do vetor e_k. Justifique cada entrada deste vetor.
(b) O método de eliminação de Gauss–Jordan constrói matrizes $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ tais que $S_n S_{n-1} \ldots\ldots S_3 S_2 S_1 A = D$ onde D é matriz diagonal. Supondo D a matriz identidade:
(b1) deduza a expressão do vetor s_k associado a cada matriz S_k;
(b2) se aplicarmos este método, ao final de um determinado estágio k do processo, mostre que a coluna k da matriz $A^{(k)}$ (matriz A modificada ao final do estágio k) é a coluna k da matriz identidade. Como fica a coluna j de $A^{(k)}$, para $j > k$?
(c) Realizada a transformação de A em D através de uma sequência de matrizes de Gauss–Jordan, como resolver o sistema linear $Ax = b$?

---

5) Considere a matriz $A : m \times p$, $m > p$ e $B : m \times (p + 1)$, $B = [A\ \ v]$ onde $v \in Im(A)$. Demonstre que $\forall\ b \in\ \mathbb{R}^m$, $\|B^+ b\|_2 \leq \|A^+ b\|_2$. Podemos afirmar que $\|B^+\|_2 \leq \|A^+\|_2$?

Exame de Qualificação agosto/2010
Doutorado em Matemática Aplicada

Análise Numérica

1. Considere $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$ e $t > 0$, com condições de contorno periódicas.
   (a) Escolha uma discretização em x para obter um sistema de equações diferenciais ordinárias. Escreva este sistema.
   (b) Use o método de Runge-Kutta de segunda ordem no sistema de EDOs do item anterior para obter uma discretização completa do tipo $U^{n+1} = B\,U^n$. Encontre a matriz B.
   (c) Descreva a análise de estabilidade para o esquema do item anterior.

2. Seja a equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ com $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$
   (a) Quais são os tipos de condições adicionais apropriadas para esta EDP?
   (b) Apresente as equações discretizadas tomando pelo menos dois tipos diferentes de condições de contorno simultaneamente.
   (c) Como você analisaria a convergencia das aproximações que resultam desta discretização?

3. Tome o esquema numérico

$$U_k^{n+1} = U_k^n - \theta\left(U_{k+1}^n - U_k^n\right), \quad \theta = \beta\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

   para o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0, \; u(x,0) = u_0(x),$$

   onde β é uma constante conhecida, que é a velocidade de advecção. Apresente uma análise da consistência e da estabilidade do esquema numérico, e comente sobre a condição de CFL.

4. Os métodos de múltiplos passos para $u'(t) = f(u,t)$, $u(0) = \eta$, têm a forma geral $\sum_{j=0}^{j=r} \alpha_j U^{n+j} = k\ \sum_{j=0}^{j=r} \beta_j f(U^{n+j}, t_{n+j})$. Considere o caso autônomo, $f(t,u) = f(u)$.
   (a) Estabeleça as condições de consistência dos métodos de multiplos passos.
   (b) Defina zero-establidade para estes métodos. Justifique a importância desta definição.
   (c) Defina estabilidade absoluta para estes métodos, justificando a importância deste conceito.
   (d) Para quais valores de α o método abaixo é zero-estável? Ele é convergente?

$$U^{n+2} - \alpha\,U^n = \frac{k}{3}\left(f(U^{n+2}) + 4\,f(U^{n+1}) + f(U^n)\right)$$

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
13/08/2010

COMBINATÓRIA ENUMERATIVA

Resolver 4 dentre as questões dadas abaixo:

1-(a) Enunciar o Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

(b) Utilizando o teorema enunciado em (a) obtenha uma fórmula de recorrência para a função $p(n)$ (número de partições irrestritas de n).

2- Dar uma interpretação combinatória para as identidades de Rogers-Ramanujan.

3- (a) Dar uma interpretação para os números q-binomiais. Dizer o que significa uma q-extensão.

(b) Enunciar e provar uma propriedade verificada pelos números q-binomiais.

4- Considere um grupo G que age no conjunto X e defina, para elementos x e y de X, a

relação $x \sim y$ se, e somente se, para algum g em G, $g.x=y$.

Mostrar que esta relação é uma relação de equivalência em X.

5- Determine as órbitas da ação de $G = (R^*,x)$ em $X= R^2$

dada por $g . (x,y) = (gx , gy)$

6- De quantas maneiras diferentes pode-se colorir os vértices de um hexágono regular usando-se 4 cores (considere o grupo de simetrias do hexágono regular).

7- Considere o problema da coloração de um tabuleiro de xadrez 3x3 usando 3 cores, vermelho, branco e azul. Encontrar o inventário padrão usando o Teorema de Polya e considerando para G o grupo de permutações dos 9 quadrados que corresponde às 8 simetrias do quadrado.

8- Enunciar e provar um resultado onde o uso do quadrado de Durfee seja fundamental.