109

UNICAMP

Exame de Qualificação

Equações Diferenciais Parciais

Escolher, para resolver, apenas quatro questões, dentre as seis. Todas têm o mesmo valor: 2.5 (dois e meio) pontos cada uma delas.

Nome:―――――――――――――――――――――Data:――――――

1-Considere $u(x,t) = u_t(x)$ solução do problema abaixo em um domínio limitado e regular $\Omega \subset R^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\big(D(x)grad(u)\big),\ x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) \geq 0,\ x \in \Omega \\ D(\xi)\dfrac{\partial u(\xi,t)}{\partial \vec{n}} = 0\ ;\ \xi \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $D(x) = \lfloor D_{ij}(x) \rfloor$ é uma matriz simétrica, $n \times n$, positiva definida, continuamente diferenciável.

Resolva apenas uma opção para as duas questões A e B abaixo mas, <u>observe</u>:
<u>a 2ª opção de cada questão vale somente metade da 1ª opção</u> !

A-Interprete este problema como um modelo matemático sob um ponto de vista geométrico ou, biológico ou, físico-químico, ***<u>onde</u>***

A_1 −(1ª Opção): $\Omega \subset R^n$, $n > 1$

$A_{1/2}$ − (2ª Opção): $\Omega = [a,b] \subset R$.

B-Considere agora um funcional (em geral, não linear) de "*Entropia*"

$S_\Phi[w] = \int_\Omega \Phi\big(w(x)\big)dx$, definido para funções $w : \Omega \to R$, **DQN**(continuamente **D**iferenciáveis tantas vezes **Q**uanto **N**ecessário)

onde $\Phi : R \to R$,$\Phi(0) = 0$, é uma função <u>*estritamente convexa*</u> (também **DQN**).

Mostre que a função de valor real $s(t) = S_\Phi[u_t]$ tem comportamento evolutivo monotônico para $t > 0$, qualquer que seja a solução (**DQN**) $u(x,t) = u_t(x)$ do problema acima, ***<u>onde</u>***

B_1 -(1ª opção): $\Omega \subset R^n$, $n > 1$

$B_{1/2}$ -(2ª opção): $\Omega = [a,b] \subset R$.

2-Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u + ru \ , x \in [0,L], t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \end{cases}$$

onde $r > 0$, $D > 0$.

A-Utilizando o Método de Fourier, mostre como obter a representação espectral da solução $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\lambda_k t) v_k(x)$, com autovalores discretos, reais, simples e ordenados $\lambda_{k+1} < \lambda_k < \dots < \lambda_0$, $k \in N$.

B-Obtenha explicitamente $\lambda_0(D,r,L)$ <u>*e mostre*</u> que existe um valor $L_0(r,D)$ de L , tal que, se $L > L_0$, teremos $\lim_{t\to\infty} u(x,t) \to 0$.

3-Considere a equação $(\partial_t + x\partial_x)u = -u$, $x \in R$, $t \geq 0$ como modelo de propagação de um sinal com intensidade $u(x,t) \geq 0$, que é emitido no instante $t = 0$ na forma de um pulso:
$u(x,0) = H(x+1) - H(x-1)$, onde H é a função de Heaviside.
Considere que a máxima amplitude detectável deste sinal é $u = \mu$, onde $0 < \mu < 1$.

A-Determine o intervalo de tempo $[T_i(x_0), T_f(x_0)]$, $(T_i(x_0) \geq 0)$, em que o sinal é detectado no ponto $x_0 \in R$.
B-Determine a região do espaço que efetivamente recebe algum sinal em algum momento.

Questão 4 Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}u(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0$$

a) Classifique-a quanto ao tipo; b) Encontre a solução geral e c) justifique se o problema composto pela equação diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}u(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0, \qquad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 2x^2, \qquad x \geq 0 \\ u(0,t) &= 0, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

é bem posto.

Questão 5 a) Encontre uma solução limitada para o problema de valor no contorno

$$
\begin{aligned}
r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\theta) + r\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}u(r,\theta) &= 0, && 1 < r,\ -\pi < 0 < \pi \\
u(1,\theta) &= \theta && -\pi < \theta < \pi \\
u(r,-\pi) = 0 = u(r,\pi), & && 1 < r.
\end{aligned}
$$

b) Calcule $u(1,\pi/2)$.

Questão 6 Utilize a metodologia da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f_0$$

com c uma constante, $0 < x < \infty$, $t > 0$. f_0 constante e satisfazendo as condições

$$u(x,0) = 0 = u(0,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0 \quad \text{para} \quad x \to \infty.$$

Formulário, eventualmente, útil

- Série e Coeficientes de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, \mathrm{d}x$$

- Série de Gregory

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

- Transformada de Laplace (Direta e Inversa)

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathrm{e}^{st} F(s) \, \mathrm{d}s$$

Exame de qualificação - Análise II - 17/8/2007

Escolha cinco dos seguinte onze itens. Dentro de cada item escolhido, dê as definições pertinentes, enuncie o(s) teorema(s) e, na medida possível, descreva também consequências e aplicações que julgar importantes. Inclua as demonstrações de dois dentre os cinco itens escolhidos dos itens 1-9.

1. Desigualdades envolvendo normas e inclusões em espaços de Sobolev, desigualdades de Poincaré e Sobolev.

2. Teoremas de compacidade: Arzela-Ascoli e Kolmogorov.

3. Propriedades da transformada de Fourier para funções L^1, L_p, L_2; simetrias de Fourier; os teoremas de convolução e inversão da transformada.

4. O teorema de Lax-Milgram.

5. Os teoremas principais de convergência na teoria de integração.

6. Teoremas de Fubini e Tonelli para integração em espaço produto.

7. Os teoremas de completamento e dualidade em espaços L^p.

8. O teorema de traço em $H^1(D)$ para D um domínio suave limitado e sua aplicação ao problema de Cauchy $\Delta u = f$ em D, $u = g$ em $\partial(D)$.

9. A construção de medida a partir de medida exterior. Exemplifique sua construcao com (i) a medida de Lebesgue; (ii) a medida $dm(x) = xdx$ na reta.

10. Compare com detalhe as definições de Riemann e Lebesgue de integrabilidade. Dê exemplos mostrando as diferenças entre as duas.

11. A definição da derivada, convolução e transformada de Fourier para distribuições.

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Nome: ______________________________ **RA:** ______________

Qualificação - 2007
17/08/2007

1. Para aproximar uma função g no intervalo $[0,1]$ por um polinômio de grau $\leq n$, minimizamos a função critério
$$f(a) = \int_0^1 [g(x) - p(x)]^2 \, dx,$$
onde $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Encontre as equações a serem satisfeitas pelos coeficientes ótimos.

---

2. O critério de decréscimo suficiente (condição de Armijo) exige $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$\varphi(\lambda) = f(x + \lambda d) < f(x) + \alpha\lambda \nabla f(x)^T d = \varphi(0) + \alpha\lambda\varphi'(0), \qquad (\star)$$
com $\alpha \in (0,1)$. Se f é uma função quadrática, então o gráfico de φ é uma parábola. Prove que, se o minimizador $\bar{\lambda}$ dessa parábola é admissível em $(\star)$, devemos ter $\alpha \in (0, 1/2)$.

---

3. No método de Newton é necessário que a matriz Hessiana seja definida positiva. Na prática devemos modificar o método quando falha esssa hipótese. Uma idéia é tomar
$$M^k = (\nabla^2 f(x^k) + \mu_k I)^{-1}, \ \mu_k > 0,$$
$$d^k = -M^k \nabla f(x^k).$$
   (a) Quais são os valores aceitáveis para μ_k de modo a garantir que o método gere direções de descida?
   (b) Que método é esse quando $\mu_k \to \infty$?

---

4. Dadas as variedades afins em $\mathbb{R}^n$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \quad \text{e} \quad U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = d\},$$
onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$, considere o problema de encontrar o ponto de S mais próximo de U.
   (a) Formule-o como um problema de otimização.
   (b) Escreva suas condições de otimalidade de primeira e de segunda ordens.

---

5. Resuma os aspectos positivos e negativos da família de métodos de programação quadrática seqüencial para resolver o problema geral de programação não linear com restrições.

Exame de Qualificação de Análise Numérica – 17/08/2007

1ª Questão: (3 pontos) Considere o PVI:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

(a) Mostre que o método explícito

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{2}\xi_i + \frac{1}{2}\xi_{i-1} + \frac{1}{2}hf(t,\xi_i) + hf(t_{i-1},\xi_{i-1})$$

é consistente e convergente.

(b) Estabeleça um método de passo variável e comente sobre vantagens e desvantagens de esquemas numéricos com passo variável.

2ª Questão: (5 pontos) Considere o esquema numérico

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\lambda}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{4}(1+\lambda^2)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \tag{1}$$

onde $\lambda = a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, $a > 0$.

(a) Mostre que se a discretização é tal que $b = \dfrac{\Delta x^2}{4\Delta t}$ = constante > 0, então o esquema é uma aproximação $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ para equação diferencial

$$u_t + au_x = bu_{xx}, \tag{2}$$

qualquer que seja b.

(b) Usando von Neumann, mostre que a condição de estabilidade é

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

(c) Em que condições pode-se garantir a convergência do método para a solução de (2), qualquer que seja b?

(d) Considere agora um caso particular onde o coeficiente de difusão é conhecido

$$b = \alpha > 0.$$

Do item (a) segue que a equação (1) é consistente com a equação diferencial

$$u_t + au_x = \alpha u_{xx}. \tag{3}$$

Por outro lado, sabe-se que a condição de estabilidade para o esquema centrado associado a equação (3) é

$$\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Quais as condições para que o método numérico seja convergente para a solução de (3)?

3ª Questão: (2 pontos) Considere a equação advectiva linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

(a) Apresente condições adicionais que tornarão um problema bem posto. O que você entende por problema bem posto?

(b) Apresente métodos numéricos para o problema acima, que sejam compatíveis com as condições apresentadas no item (a). Comente sobre sua ordem de aproximação.

Boa Prova !

Exame de Qualificação de Análise Numérica – 17/08/2007

1ª Questão: (3 pontos) Considere o PVI:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x), \quad t>0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

(a) Mostre que o método explícito

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{2}\xi_i + \frac{1}{2}\xi_{i-1} + \frac{1}{2}hf(t,\xi_i) + hf(t_{i-1},\xi_{i-1})$$

é consistente e convergente.

(b) Estabeleça um método de passo variável e comente sobre vantagens e desvantagens de esquemas numéricos com passo variável.

2ª Questão: (5 pontos) Considere o esquema numérico

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\lambda}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{4}(1+\lambda^2)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \tag{1}$$

onde $\lambda = a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, $a>0$.

(a) Mostre que se a discretização é tal que $b = \dfrac{\Delta x^2}{4\Delta t} = \text{constante} > 0$, então o esquema é uma aproximação $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ para equação diferencial

$$u_t + au_x = bu_{xx}, \tag{2}$$

qualquer que seja b.

(b) Usando von Neumann, mostre que a condição de estabilidade é

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1.$$

(c) Em que condições pode-se garantir a convergência do método para a solução de (2), qualquer que seja b?

(d) Considere agora um caso particular onde o coeficiente de difusão é conhecido

$$b = \alpha > 0.$$

Do item (a) segue que a equação (1) é consistente com a equação diferencial

$$u_t + au_x = \alpha u_{xx}. \tag{3}$$

Por outro lado, sabe-se que a condição de estabilidade para o esquema centrado associado a equação (3) é

$$\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Quais as condições para que o método numérico seja convergente para a solução de (3)?

3ª Questão: (2 pontos) Considere a equação advectiva linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

(a) Apresente condições adicionais que tornarão um problema bem posto. O que você entende por problema bem posto?

(b) Apresente métodos numéricos para o problema acima, que sejam compatíveis com as condições apresentadas no item (a). Comente sobre sua ordem de aproximação.

Boa Prova !

Matrizes - Exame de Qualificação - 15/08/07

1. Descreva como usar reflexões de Householder e rotações de Givens para obter a decomposição QR.

2. (a) Seja A simétrica. Mostre que $f(x) = (x^t A x)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em $\mathcal{R}^n$ se e somente se a martiz A é positiva definida.

   (b) Fale sobre norma induzida. Motivação e justificativa da existência.

3. Mostre que se $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ tem posto n, então

$$\|A(A^t A)^{-1} A^t\|_2 = 1.$$

4. Mostre que a série

$$I + A + A^2 \ \cdots$$

converge se e somente se a série abaixo converge

$$I + B + B^2 \ \cdots$$

onde B é similar à matriz A.
Sugestão: use o fato que se $(I - F)^{-1}$ existe, então

$$(I - F)^{-1} = I + F + F^2 \ \cdots$$

Exame de Qualificação de Análise Aplicada - Agôsto de 2007

Resolva 5 exercícios. Os dois da Parte I são obrigatórios.

1 Parte I

1. Seja $C[a,b]$ o espaço das funções contínuas no intervalo fechado $[a,b]$, com a norma do sup. Seja a transformação linear $T : C[a,b] \to C[a,b]$ dada por

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)ds, \qquad a \leq t \leq b.$$

a) Mostre que T é um operador limitado e calcule a norma $\|T\|$.
b) Mostre que T não tem autovetores.

2. Enuncie o Teorema do Ponto Fixo de Banach (TPF). Considere a Equação Integral de Fredholm de 2^a Espécie

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)ds,$$

onde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Utilizando o TPF, encontre um intervalo de λ tal que a Equação de Fredholm tenha uma única solução.

2 Parte II

1. Defina Espaço de Banach. Seja c_0 o espaço das sequencias reais convergentes para zero, com a norma do sup. Mostre que c_0 é Espaço de Banach.

2. Considere o espaço $E = C[0,1]$ das funções contínuas no intervalo [0,1], com a norma do sup, e seja o subconjunto

$$A = \{x \in E, x(0) = 0 \quad e \quad \int_0^1 x(t)dt = 1\}.$$

Mostre que A é um subconjunto fechado e convexo de E.

3. Considere o espaço de Hilbert $L^2[0,+\infty)$, com o produto interno:

$$\langle x,y\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}x(t)y(t)dt.$$

Uma família ortogonal neste espaço é a dos Polinômios de Laguerre. Calcule os Polinômios de Laguerre de graus 0,1,2 e 3.

4. Seja X um Espaço de Banach e $f_n : X \to X, n \in \mathbb{N}$ contrações, com suas constantes de contração $k_n < \lambda < 1, \forall n = 1,2,3,\cdots$. Suponha que $f_n \to f$ pontualmente. Mostre que f é contração e, se $\bar{x}_n, n \in \mathbb{N}$ e $\bar{x}$ são os pontos fixos de f_n e f, respectivamente, então $\bar{x}_n \to \bar{x}$.

5. Defina um Espaço de Hilbert real. Demonstre a Desigualdade de Schwarz. Exemplifique-a, explicitamente, em l^2