Exame de Qualificação – DMA/UNICAMP

MT401 - Análise Aplicada

22 de agosto de 2016

Instruções, leia com atenção:

- *O exame tem 6 questões, mas serão consideradas apenas suas 5 melhores soluções.*
- *Inicie a solução de cada questão em uma página nova, identificando claramente que questão está sendo resolvida. Procure ser claro na escrita. Não é necessário repetir o enunciado.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- **Não entregue** *seus rascunhos.*
- *Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado final será divulgado na secretaria de Pós-Graduação. Um roteiro para a solução deste exame será divulgado em breve no endereço:* `http://analiseaplicada.wordpress.com/`

Boa prova!

A. Saa & Y. Bozhkov

---

1. A curva seno do topologista $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, definida como sendo o conjunto de pontos

$$\mathcal{S} = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < |x| \leq 1 \right\},$$

tem diversas propriedades interessantes. Determine, em particular, se $\mathcal{S}$ e seu fecho $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^2$ são ou não conjuntos compactos.

2. Considere $C^k[0,1]$, o espaço das funções com as k primeiras derivadas contínuas no intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que

$$\rho(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty + ||f''||_\infty + \cdots + \left|\left| f^{(k)} \right|\right|_\infty,$$

   para $f \in C^k[0,1]$, sendo $||\cdot||_\infty$ a norma do sup usual em $[0,1]$, é uma norma para $C^k[0,1]$.

   (b) O espaço $C^k[0,1]$, munido da norma do item anterior, é um espaço de Banach? Justifique.

(Dica: você pode usar o fato de que $C[0,1]$ munido da norma do sup é completo.)

3. Seja $c_0 \subset l^\infty$ o subespaço das seqüências limitadas $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, munido da norma do sup usual $||\cdot||_\infty$ para seqüências.

   (a) Mostre que c_0 é um espaço de Banach.

   (b) c_0 é separável?

   (c) Identifique quem é seu espaço dual c_0'.

4. Seja T um operador linear, limitado e auto-adjunto em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ **complexo**. Demonstre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|\langle x, (T-\lambda)x\rangle| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|||x||^2,$$

   para todo $x \in \mathcal{H}$. Suponha agora que para um certo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, valha a igualdade para todo $x \in \mathcal{H}$. O que se pode concluir sobre T nesse caso?

5. Considere o operador linear $T : \ell^\infty \to \ell^p$, com $p \geq 1$, dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \to \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots\right).$$

   (a) O operador T é contínuo para algum p? Justifique.

   (b) A imagem $T(\ell^\infty)$ é um conjunto fechado em ℓ^p para algum p? Justifique.

   (c) O operador T é uma contração para algum p? Justifique.

6. Seja T o operador linear $T : D \to \ell^2$ definido como $Te_k = ke_k$, sendo e_k a base de Schauder usual de ℓ^2 e $\mathrm{Dom}(T) = D \subseteq \ell^2$.

   (a) Mostre que T não é contínuo se $D = \ell^2$.

   (b) Mostre que existe um subconjunto D denso em ℓ^2 para o qual $T : D \to \ell^2$ é contínuo.

Exame de Qualificação
Matrizes - MT 402

24 de agosto de 2016

1. Explique as diferentes alternativas para se obter a decomposição QR de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, justificando a conveniência de cada uma.

2. Dada a seguinte fórmula
$$(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i.$$

   (a) Dar condições para a validade da mesma.

   (b) Fazer um esboço da demonstração.

   (c) Escrever $\|(I - A)^{-1}\|$ em função da norma de $\|A\|$.

3. Resolva cada item:

   (a) Dada um matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ explique, usando a SVD, qual é a imagem da bola euclidiana unitária ao ser multiplicada por A.

   (b) Relacione a SVD com a distância de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com o conjunto das matrizes de posto até k. Discuta diferentes possibilidades.

   (c) Estabeleça a relação da SVD com quadrados mínimos lineares.

4. Resolva os itens abaixo:

   (a) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz normal, prove que ela é unitariamente similar a uma matriz diagonal.

   (b) Dados o sistema
$$Ax = b,$$
em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica definida positiva e $d^1, d^2, \ldots, d^n$ direções A-conjugadas. Aplique o método de direções conjugadas discutindo o que ocorre a cada passo.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
DOUTORADO EM MATEMTICA APLICADA
Exame Específico:
MT709 - Equações Diferenciais Parciais Aplicadas

26.08.2016

1. Considere o Problema de Cauchy clássico:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), \quad t > 0, \tag{1}$$
$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

onde $\varphi_0 \in C^2((-\infty,+\infty)), \varphi_1 \in C^1((-\infty,+\infty))$ e $f \in C^1((-\infty,+\infty) \times [0,+\infty))$.

a) Prove que existe única solução do problema $(1)-(2)$ dada pela seguinte Fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x+ct) + \varphi_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau. \tag{3}$$

b) Procurar outra maneira de obter a fórmula (3) integrando sobre o triângulo característico com vertices $(x-ct,0),(x,t),(x+ct,0)$ e utilizando o Teorema de Green.

2. Considere a Equação de Aronsson:

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0. \tag{4}$$

a) Transforme a equação (4) a uma equação linear em termos de novas variáveis independentes p e q, e variável dipendente $w = w(p,q)$.

b) Introduzindo coordenadas polares (r,θ) no plano (p,q), transforme a equação obtida em a) a seguinte equação

$$w_{\theta\theta} + r w_r = 0. \tag{5}$$

c) Mostre que a equação (5) se transforma a Equação do Calor

$$w_\rho = w_{\theta\theta},$$

onde $\rho = -\log r$.

Programação Linear - Exame de Qualificação - 26/08/16

1. Utilizando técnicas de programação linear mostre que:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1 + 3x_2 & \leq 7 \\ x_1 - x_2 & \leq 1 \\ (x_1, x_2) & \geq 0 \end{array}\right\} => 8x_1 + 3x_2 \leq 23.$$

2. Considere o *tableau* de um problema de programação linear na forma padrão:

x1	x2	x3	x4	x5	
0	-2	0	3	0	-18
0	-4	1	1	2	2
1	1	0	-2	-3	0

   (a) Quais são as variáveis básicas e não básicas?

   (b) Qual o valor de x_B e x_N?

   (c) Qual o valor de $\tilde{N} = B^{-1}N$?

   (d) Essa solução é factível?

   (e) Essa solução é ótima?

   (f) Essa solução é degenerada?

   Justifique todas suas respostas.

3. Encontre o dual do dual do problema primal na forma padrão.

4. Mostre que o *gap*, $\gamma^{k+1} = c^t x^{k+1} - b^t y^{k+1}$ da iteração $k+1$ do método primal dual afim escala com passo um ($\alpha_p^k = \alpha_d^k = 1$) é dado por $\gamma^{k+1} = (dx^k)^t dz^k$.

5. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x + 0^t s \\ \text{s. a} & Ax = b, \\ & Ex + s = u, \\ & (x, s) \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre o dual deste problema.

   (b) Determine as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.

   (c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método primal-dual.

   (d) Encontre o sistema de equações normais através de eliminação de variáveis. Não se preocupe em desenvolver o lado direito das equações. Considere que A e E tem posto igual ao respectivo número de linhas.

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
MT 520 – TRATAMENTO DE SINAIS DIGITAIS
EXAME DE QUALIFICAÇÃO 2S/2016

UNICAMP

$\boxed{1}$ Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e D o operador derivada, isto é, $(Df)(x) = f'(x)$, e μ a função de Heaviside, ou seja,

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Defina $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu * \mu_1$, $\mu_3 = \mu * \mu_2$ e assim por diante. Se f é uma função suficientemente suave e absolutamente integrável em $\mathbb{R}$, mostre que

$$D(\mu * f) = \mu * (Df) = f,$$

e, se p e q são inteiros positivos, que

$$D^p(\mu_q * f) = \begin{cases} D^{p-q}f, & \text{se } p > q, \\ f, & \text{se } p = q, \\ \mu_{q-p} * f, & \text{se } q > p. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

(a) Construa a série de Fourier em senos para f.

(b) Construa a série de Fourier em cossenos para f.

(c) O que pode ser dito sobre a convergência dessas séries?

A saber, para todo $a \neq 0$,

$$\int x^2 \sin(ax)\, dx = \frac{2x}{a^2}\sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos(ax),$$

$$\int x^2 \cos(ax)\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax).$$

$\boxed{3}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\hat{f}$ sua transformada de Fourier. Defina

$$g(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi j),$$

supondo que a soma existe. Mostre que g é uma função periódica, com período 2π. Usando a série de Fourier de g, mostre que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(2\pi j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
22/08/2016

COMBINATÓRIA ENUMERATIVA

Resolver 5 dentre as questões dadas abaixo:

1- (a) Definir partição irrestrita, comentando sobre sua função geradora e representação gráfica.

Fornecer, também, a função geradora para alguma classe de partições com restrições.

(b) Fornecer, pelo menos, 2 identidades combinatórias, envolvendo funções geradoras e as

respectivas interpretações combinatórias.

2-(a) Enunciar o Teorema de Burnside

(b) Enunciar um problema que possa ser resolvido pela aplicação deste teorema fornecendo sua solução.

3- Conhecido o tipo cíclico de uma permutação como se pode calcular o número de permutações tendo este tipo cíclico?

4- Quantos são os diferentes padrões que se pode obter pela coloração de um tabuleiro (4X4), preto e branco, de tal forma que se tenha exatamente 3 quadrados com a cor branca e 13 com a cor preta? (considere o grupo das 8 simetrias do quadrado).

5- Enunciar o Teorema dos Números Pentagonais de Euler descrevendo uma demonstração de

natureza combinatória ou analítica.

6- Definir os polinômios de Gauss e demonstrar alguma das várias propriedades verificadas por estes polinômios. Dar, pelo menos, uma interpretação combinatória para estes polinômios.

7- (a) Calcular as ordens dos elementos do grupo de simetrias de um quadrado.

(b) Mostrar que um grupo onde todo elemento, diferente da identidade, tem ordem 2 é comutativo.

(i) Definir "tipo cíclico" de uma permutação e sua relação com partição.

8- Como se define a ação de um grupo G em um conjunto X?

Considere um grupo G que age no conjunto X e defina, para elementos x e y de X, a relação $x \sim y$ se, e somente se, para algum g em G , $g.x=y$.

Mostrar que esta relação é uma relação de equivalência em X.