Departamento de Matemática Aplicada

IMECC - UNICAMP

Exame de Admissão 2013

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente somente a ***resolução de oito questões****, dentre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Diferencial e Integral. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas. Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas* ***não*** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Cálculo Diferencial e Integral

Questão 1. **(20 Pontos)**

Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, satisfazendo

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h|g(h) \quad \text{com} \quad h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \text{ com } \lim_{h \to 0} g(h) = 0.$$

(a) Mostre que f é uma função constante em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre, com um contra-exemplo, que se a hipótese $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$ não é satisfeita, a afirmação em (a) pode não valer.

Questão 2. (20 Pontos)

(a) Encontre a equação da família de curvas nas quais a normal em qualquer ponto (x, y) da curva e a reta que une a origem ao ponto (x, y), formam um triângulo isósceles, tendo a base no eixo-x. Esboce uma curva da família obtida.

(b) Para cada (x, y) de uma curva da família, seja $\varphi(x)$ o ângulo, do triângulo acima definido, oposto à base do triângulo (isósceles). Calcule $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)$.

Questão 3. (20 Pontos)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função contínua, com derivada $f'(x)$ contínua em $[a, b]$ tal que

$$0 < f'(x) < M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Encontre $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq f(x) \leq d$.

Questão 4. (20 Pontos)

(a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) Considere o triângulo formado pelos pontos $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$, orientado no sentido anti-horário. Usando a parte (a), mostre que a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

Questão 5. (20 Pontos)

Mostre pelo *Método de Somas de Riemann*, que $I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Sugestão: A fórmula abaixo pode ser útil

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Álgebra Linear

Questão 6. (20 Pontos)

Seja o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, com $a_0 \neq 0$. Seja A uma matriz inversível e suponha que $p(A) = 0$. Calcule a matriz inversa A^{-1} em função de A.

Questão 7. (20 Pontos)

Seja $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o Espaço Vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 e seja o operador $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(p(x)) = p(x) + (x+1)p'(x) + (x^2 - 1)p''(x)$$

Determine uma base ordenada β de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de tal modo que $[T]_\beta^\beta$ seja uma matriz diagonal.

Questão 8. (20 Pontos)

Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \cdot, \cdot >$ e seja U subespaço vetorial de V gerado pelo conjunto de vetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Dado o vetor $\vec{v} \in V$, mostre que sempre existem coeficientes $\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$, tais que o vetor $\vec{w} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ é o que melhor se aproxima de $\vec{v}$, segundo a função distância (ao quadrado) dada por $f(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}||^2 =< \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} >$.

Questão 9. (20 Pontos)

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (x+1) & 1 \\ (x+1) & 1 & (x+1) \\ 1 & (x+1) & 1 \end{bmatrix},$$

determine para que valores de $x \in I\!R$ a matriz A é semidefinida positiva, ou seja, todos os seus autovalores são não-negativos.

Questão 10. (20 Pontos)

Seja a transformação linear de derivação $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ou seja, $D(p(x)) = p'(x), \quad \forall p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ e seja $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por

$$T(q(x)) = \int_0^x q(t)dt, \quad \forall q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que $D \circ T$ é o operador identidade sobre $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que $T \circ D$ é diferente do operador identidade sobre $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) Determine o Núcleo e Imagem de $T \circ D$.