Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Admissão 2011

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente a resolução de somente oito questões, dentre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Diferencial e Integral. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas. Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas ***não*** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Álgebra Linear

Definição 1 *Seja A uma matriz real simétrica de ordem n. Dizemos que A é uma matriz **positiva–definida** se*

$$X^t A X > 0$$

para toda matriz coluna não–nula X de ordem $n \times 1$.

Questão 1. **(20 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ v_1, \cdots , v_n \}$ uma base ordenada de V.

(a) Determine a matriz do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ com relação à base ordenada β de V.

(b) Mostre que a matriz do produto interno é uma matriz positiva–definida.

(c) Dados os escalares $c_1, \cdots , c_n$, mostre que existe um único elemento $u \in V$ tal que

$$\langle u , v_i \rangle = c_i \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots , n .$$

(d) Considerando o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno

$$\langle u , v \rangle = 5x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 + 4x_2 y_2 ,$$

onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$, determine a matriz do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ com relação à base ordenada $\beta = \{ v_1 = (1,1) , v_2 = (1,-1) \}$ do $\mathbb{R}^2$.

Questão 2. **(20 Pontos)**

Considere U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, S um subconjunto de V com um número finito de elementos, e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ um produto interno em V. Diga se é **F**alsa ou **V**erdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Se T um operador linear sobre V tal que $\langle T(u) , T(u) \rangle = \langle u , u \rangle$ para todo $u \in V$, então T é um operador linear injetor.

(b) Se S é um conjunto linearmente dependente, então qualquer subconjunto de S é também linearmente dependente.

(c) Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear tal que $T(T(v)) = T(v)$ para todo $v \in V$, então $V = Im(T) \oplus Ker(T)$, onde $Ker(T)$ é o núcleo do operador linear T e $Im(T)$ é a imagem do operador linear T.

(d) Se $T : U \longrightarrow V$ e $P : V \longrightarrow W$ são transformações lineares bijetoras, então $P \circ T$ também é uma transformação linear bijetora.

(e) Se os elementos u, v, $w \in V$ são tais que $\langle u , v \rangle = \langle u , w \rangle$, então $v = w$.

Questão 3. **(20 Pontos)**

Considere a aplicação $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido da seguinte forma:

$$T(p(x)) \;=\; x^2 p''(x) \;+\; p'(x) \;+\; p(0) \qquad ; \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau ≤ 3.

(a) Mostre que T é uma aplicação linear.

(b) Determine a matriz da transformação linear T, $[T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é, $\beta = \{1\,,\,x\,,\,x^2\,,\,x^3\}$.

(c) O operador linear T é injetor?

(d) O operador linear T é diagonalizável? Em caso afirmativo, determine uma base ordenada γ para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de modo que $[T]_\gamma^\gamma$ seja uma matriz diagonal.

Questão 4. **(20 Pontos)**

Seja A uma matriz anti–simétrica de ordem n, isto é, $A^t = -A$.

(a) Mostre que os elementos da diagonal principal da matriz A são todos nulos.

(b) Mostre que $X^tAX = 0$ para toda matriz coluna X de ordem $n \times 1$.

(c) Mostre que a matriz $I_n + A$ é não–singular, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Questão 5. **(20 Pontos)**

Considere A uma matriz de ordem $m \times n$, tal que o sistema linear homogêneo $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$ possui pelo menos uma solução não trivial, isto é, uma solução $\bar{x} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

(a) Mostre que o sistema linear $A^t y = b$ não possui solução para alguns elementos $b \in \mathbb{R}^n$.

(b) Dê um exemplo considerando uma matriz A de ordem 4×3 e um elemento $b \in \mathbb{R}^3$.

Note que estamos considerando que os elementos do $\mathbb{R}^n$ são matrizes coluna de ordem $n \times 1$, e os elementos do $\mathbb{R}^m$ são matrizes coluna de ordem $m \times 1$.

Questão 6. **(20 Pontos)**

Considere a superfície em $I\!R^3$ dada pela equação

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\,,$$

para a uma constante positiva, e considere um plano tangente a esta superfície em um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Este plano vai cortar os eixos coordenados nos pontos $P_1 = (x_1, 0, 0)$, $P_2 = (0, y_1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, z_1)$.

Encontre os valores de x_1, y_1 e z_1 e mostre que a soma $x_1 + y_1 + z_1$ é constante, isto é, não depende do ponto P_0 em que o plano tangencia a superfície.

Questão 7. **(20 Pontos)**

Sejam $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$ a equação de movimento de uma partícula de massa m que se desloca no plano cartesiano do ponto inicial $A = \vec{r}(t_1)$ até a uma posição final $B = \vec{r}(t_2)$, e $\vec{F}$ um campo de força que atua sobre a partícula.

(a) Mostre que o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é igual à diferença dos valores da energia cinética da partícula em suas posições final e inicial, isto é,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{m}{2}\| \vec{v}(t_2) \|^2 - \frac{m}{2}\| \vec{v}(t_1) \|^2$$

(b) Considere $\vec{F}$ um campo de força conservativo, isto é, existe uma função energia potencial U tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Mostre que

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(\,U(B) - U(A)\,)$$

(c) Considere $\vec{F}$ um campo de força conservativo. Mostre que temos uma conservação de energia, isto é,

$$\frac{m}{2}\| \vec{v}(t_1) \|^2 + U(A) = \frac{m}{2}\| \vec{v}(t_2) \|^2 + U(B)$$

onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade da partícula, e Γ é a trajetória da partícula.

Questão 8. **(20 Pontos)**

Sejam $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ uma função contínua, $x_1, \cdots, x_n$ pontos distintos de $[a,b]$, e números reais de mesmo sinal $w_1, \cdots, w_n$. Mostre que existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) w_i = f(c) \sum_{i=1}^{n} w_i \, .$$

Questão 9. **(20 Pontos)**

Sejam $\vec{n}$ um vetor normal exterior à circunferência $\mathcal{C}$ definida pela equação

$$x^2 + y^2 = 4 ,$$

e o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = 3x^2\vec{\imath} + 4y^2\vec{\jmath}$. Determine um ponto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}$ e uma direção $\vec{n}$ de modo que a taxa de variação do campo escalar $G = div(\vec{F})$ no ponto $\bar{P}$ na direção do vetor $\vec{n}$ seja máxima, isto é, resolva o seguinte problema de maximização com restrição

$$\max \left\{ \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} G \cdot \vec{n} \quad , \quad P = (x,y) \in \mathcal{C} \right\} .$$

Questão 10. **(20 Pontos)**

Considere o sistema de Equações Diferencias Ordinárias

$$X'(t) \;=\; AX(t) \qquad \text{onde} \qquad A \;=\; \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X(t) \;=\; \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}\,.$$

(a) Determine o valor do parâmetro α de modo que a matriz A tenha um único autovalor com multiplicidade algébrica igual a dois.

(b) Para o parâmetro α encontrado no item (a), determine os autovetores da matriz A.

(c) Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias, considerando o parâmetro α encontrado no item (a).

(d) Faça a classificação quanto a estabilidade da solução estacionária do sistema de equações diferenciais ordinárias, considerando o parâmetro α encontrado no item (a).