Exame de Qualificação agosto 2009

Doutorado em Matemática Aplicada

Nome: ______________________________

Análise Numérica

1. Considere a equação diferencial $y''(x) + cos(x)y'(x) - exp(x) = x^3$, com condições de contorno $y(0) = 1$ e $y'(1) = 0$.

   (a) Deduza as expressões para aproximação de segunda ordem de todas as derivadas que aparecem no problema. Apresente o problema discretizado.

   (b) Descreva o procedimento necessário para a obtenção da aproximação correspondente a $\Delta\ x = 0.2$, apresentando o sistema de equações resultante e o método numérico mais adequado à sua solução. Justifique.

2. Escreva sobre o conceito de estabilidade em metodos numéricos para equações diferenciais. Comente sobre a utilidade deste conceito e apresente dois exemplos, um de um esquema instável e outro de um esquema estável.

3. Considere a equação diferencial parcial $u_t + au_x = 0$.

   (a) Obtenha um esquema de diferenças finitas da forma

   $$U_j^{n+1} = \alpha U_{j-1}^n + \beta U_j^n + \gamma U_{j+1}^n,$$

   com a maior ordem de aproximação possível. Justifique.

   (b) Considerando o método upwind no domínio $0 < x < 1$ e $t > 0$, como devem ser as condições adicionais para o que as aproximações sejam convergentes para uma única solução? Compare estas com as necessárias no item 1.

   (c) Defina a condição CFL e discuta seu papel nos métodos de discretização.

4. As questões anteriores não abordaram todos os tópicos da disciplina Análise Numérica. Use no máximo uma página para discorrer sobre um tópico que as questões anteriores NÃO abordaram, justificando sua importância no quadro geral de Análise Numérica

DMA - IMECC - UNICAMP 12/AGOSTO/2009

MT 402: MATRIZES PROFS. VÉRA LOPES E ROBERTO ANDREANI

Exame de Qualificação

Questão 1: Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

com $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversível. Mostre que $\|A^\dagger\| \leq \|A_1^{-1}\|$.

Questão 2:

(a) Explique como fazer uma fatoração QR de uma matriz A, usando matrizes de Householder. (Escreva o que você achar importante)

(b) Explique como se faz a tridiagonalização de uma matriz simétrica para aplicar o método QR.

(c) Considerando o item (b), explique porque tridiagonalizar e não diagonalizar a matriz.

Questão 3: Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots, \geq \lambda_n$, autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matriz simétrica. Mostre que

$$\lambda_i = \max_{v_1,\ldots,v_{n-i} \in \mathbb{R}^n} \quad \min_{x \perp v_1,\ldots,v_{n-i},\ \|x\|=1} x^T A x$$

Questão 4: Seja $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz nilpotente de ordem k. Definimos

$$M_i = \mathcal{I}m(L^i) \cap \mathcal{N}(L),$$

para $i = 1, \ldots, k$. Mostre que

(a) $M_i \subset M_{i-1}$

(b) $\mathcal{I}m(L^{k-1}) = M_{k-1}$

(c) Prove o teorema de Caley- Hamilton: "A matriz A é raiz de seu próprio polinômio característico, ou seja: $p(A) = 0$".

Respostas não justificadas não serão consideradas.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE APLICADA - agosto de 2009

NOME: RA:

Resolva cinco exercícios, sendo dois da Parte I e três da Parte II .

- **Parte I**

1. a) Em um espaço o métrico $\{X, d\}$ mostre que toda sequência de Cauchy é limitada. b) Se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente ela é convergente? Prove ou dê um contra-exemplo.

2. Seja X o espaço de todas as sequências reais limitadas $x = (\xi_j)$. Considere a norma dada por $\|x\| = \sup\{|\xi_j|, j \in I\!N\}$. Defina $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. B é compacto? Se sua resposta for afirmativa, prove. Caso contrário, exiba um subconjunto infinito sem pontos de acumulação e justifique cuidadosamente.

3. Seja B o espaço das funções $f : [0,1] \to R$ limitadas, com a mt́r ica $d(f,g) = ||f - g||_\infty$ em que $||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Prove que (B, d) não é separável.

4. Seja $M \subset \ell^\infty$ o espaço das sequências $x = (\xi_j)$ com apenas um número finito de termos não nulos. Mostre que M não é completo.

- **Parte II**

1. Seja $T : X \to Y$ um operador linear, em que X, Y são espaços vetoriais normados. Prove que T é contínuo se e somente se é um operador limitado.

2. Seja $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $Tx(t) = \int_0^t x(s)ds$. Encontre a imagem $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ e $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to C[0,1]$. T^{-1} é linear e limitado?

3. Para funções $f \in L^2[-\pi, \pi]$ considere os operadores $T_n f$ definidos pelas expansões

$$T_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

em termos dos polinômios trigonométricos ortogonais em $L^2[-\pi, \pi]$, em que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Descreva as principais propriedades destes operadores. Qual a relação entre os coeficientes a_k e b_k e a norma $||f||_2$?

4. a) Enuncie o Teorema do Ponto Fixo. b) Considere $T : C[0,1] \to C[0,1]$ a aplicação definida por $Tx(t) = (1-t)x(t) + tsen(\frac{1}{t})$. Prove que T não tem ponto fixo na bola unitária fechada de $C[0,1]$, com a norma do máximo. Identifique uma das hipóteses do Teorema do Ponto Fixo que não é verificada neste caso.

Boa Sorte!!!

Nome: ______________________________ RA: ____________________

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais Parciais Aplicadas

Agosto de 2009

Todas as questões têm o mesmo peso na nota final. Reserve meia-hora de seu tempo para uma entrevista com o examinador.

1. Discuta quais as condições iniciais ou de contorno apropriadas para cada tipo de equação diferencial parcial linear (ie, elíptico, parabólico e hiperbólico).

2. Fale o que souber e achar relevante sobre o princípio do máximo para EDPs elípticas. Dê um exemplo relevante de aplicação deste princípio.

   Bônus: o que ocorre nos casos parabólico e hiperbólico?

3. Fale o que souber e achar relevante sobre transformadas de Fourier ou Laplace (à sua escolha), com exemplos.