UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2006

PROGRAMAÇÃO LINER – Exame de Qualificação

Respostas sem justificativas não serão consideradas para correção

Nome:	RA:

Exercício 1: Uma indústria de motos deseja determinar seu plano de produção para os próximos 4 trimestres. A demanda projetada para cada trimestre é: Trimestre 1→40 unidades; Trimestre 2→70 unidades; Trimestre 3→50 unidades; trimestre 4→20 unidades. A empresa tem os seguintes custos:

1. Custo de produzir cada moto é R$400,00;
2. No fim de cada trimestre, há um custo de estoque de R$100,00 por moto armazenada;
3. Aumento de produção de um trimestre para o outro incorre em custos de treinamento. Estima-se um custo de R$700.00 por moto se a produção for aumentada;
4. Decréscimo de produção de um trimestre para outro provoca alguns custos que são estimados em R$600,00 por moto.

Todas as demandas devem ser satisfeitas e a produção de um trimestre pode ser usada para satisfazer a demanda do próximo trimestre. Durante o trimestre imediatamente anterior ao primeiro trimestre foram produzidas 50 motos e que o estoque no início do trimestre 1 é zero.

(A) Formule com um PPL que minimize o custo total durante os próximos 4 trimestres.(7 pts)
(B) Suponha agora que a empresa não precisa satisfazer a demanda no trimestre em questão e toda vez que a demanda não for atendida em um certo semestre há um custo de perda de confiança de R$110,00 por moto não atendida. Mas, toda demanda deve ser satisfeita pelo fim do quarto trimestre. Modifique o modelo dado em (A) para acomodar esta nova situação.(3 pts)

Exercício 2:[5 pontos] Escreva as condições de KKT para o PPL abaixo:

$$\begin{gathered} \text{Min } \; z = c^t x \\ \text{sujeito a} \\ A_1 x = b_1 \\ A_2 x = b_2 \\ x \geq 0. \end{gathered}$$

Exercício 3: Uma empresa fabrica 3 tipos de doces. Cada doce é feito exclusivamente de açúcar e chocolate. A composição de cada doce, bem como seu lucro é dado abaixo:

	Qtde de Açúcar	Qtde de chocolate	Lucro
Doce 1	1	2	3 centavos
Doce 2	1	3	7 centavos
Doce 3	1	1	5 centavos
Disponibilidade	50g	100g	

Definindo x_i como o número de doce do tipo i produzido. o modelo abaixo representa o PPL que maximiza o lucro, satisfazendo as restrições de disponibilidade de açúcar e chocolate:

$$
\begin{array}{llrl}
\text{Maximize} & Z_p = & 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 & \\
\text{sujeito a} & & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 50 \\
& & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 100 \\
& & x_1, x_2, x_3 & \geq 0.
\end{array}
$$

Pede-se:

(A) Dê o dual do problema acima[l ponto].
(B) Dê a solução primal do problema[2 pontos].
(C) Dê a solução dual do problema (sem resolver o problema dual)[l ponto].
(D) Para quais valores de lucro do Doce 1. a solução encontrada em (B) continua sendo ótima?[1.5 pontos]
(E) Para quais valores de lucro do Doce 2 a solução encontrada em (B) continua sendo ótima?[2 pontos]
(F) Até que valor podemos aumentar a disponibilidade de açúcar tal que a solução encontrada em (B) continue ótima? [1.5 pontos]
(G) Se 60 g de açúcar estivesse disponível. qual seria o lucro da empresa ?[1 ponto]
(H) Suponha que o Doce 1 usasse apenas 0.5 unidades de açúcar e 0.5 unidades de chocolate. A empresa iria produzir o Doce 1?[1.5 pontos]
(I) A empresa está considerando a possibilidade de fazer um doce do tipo 4. Este doce daria um lucro de 4 centavos e necessitaria de 3 gramas de açúcar e 4 gramas de chocolate. A empresa iria produzir este novo doce?[2 pontos]

Observação: A nota da prova será calculada através da fórmula:

$$\frac{\textbf{Número de Pontos obtidos.}}{28.5}$$

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE ANÁLISE APLICADA - Março 2006

NOME:

RA:

Resolva cinco exercícios, sendo dois da Parte I e três da Parte II.

- **Parte I**

1. Seja X o espaço de todas as seqüências reais $x = (\psi_j)$ com um número finito de elementos diferentes de zero. Considere a distância dada por

$$d(x, y) = \max\{|\psi_j - \eta_j| \in IN\},$$

onde $x = (\psi_j)$, $y = (\eta_j)$. X é completo? Prove ou mostre uma seqüência de Cauchy que não converge, justificando cuidadosamente todas suas afirmações.

2. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy, em um espaço métrico $\{x, d\}$, mostre que a seqüência de números reais $a_n = d(x_n, y_n)$ é convergente.

3. Seja X o espaço de todas as seqüências reais limitadas $x = (\psi_j)$. Considere a norma dada por

$$||x|| = \sup\{|\psi_j|,\ j \in IN\}.$$

Defina

$$B = \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}.$$

B é compacto? Se sua resposta é afirmativa, prove. Em caso contrário, exiba um subconjunto infinito sem pontos de acumulação e justifique cuidadosamente.

4. Seja X um espaço métrico completo e seja T uma contração em X. O que pode afirmar sobre a convergência da seqüência definida por $x_{k+1} = T(x_k)$? Que poderia acontecer se X não fosse completo? Exiba um exemplo.

5. Seja $X = C\,[0, 1]$ com a mética $d(f, g) = ||f - g||_\infty$ em que $||f||_\infty = max_{x\in[a,b]}\,|f(x)|$. Prove que (X, d) é separável.

6. Mostre que o conjunto $Y \subset \{C[a, b], ||\ .\ ||_\infty\}$ formado pelas funções que se anulam nos extremos do intervalo é um subespaço vetorial completo.

7. Sejam X e Y espaços métricos, sendo X compacto, e $T : X \rightarrow Y$ uma função bijetiva e contínua. Prove que T^{-1} é contínua.

8. Seja X um espaço métrico com a distância d. Para todo par de subconjuntos $A \subset X$ e $B \subset X$ definimos

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Seja Y o conjunto dos subconjuntos de X. Quais axiomas de distância são verificados por D? Prove ou dê contra-exemplo.

9. Seja X um espaço métrico. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em X tal que admite uma subseqüência convergente. É verdade que (x_n) é necessariamente convergente? Prove ou forneça contra-exemplo.

10. Prove ou forneça contra-exemplo para as seguintes afirmações:
   (a) União finita de compactos é compacto.
   (b) União arbitrária (finita ou infinita) de compactos é compacto.
   (c) lntersecção finita de compactos é compacto.
   (d) lntersecção arbitrária (finita ou infinita) de compactos é compacto.

- **Parte II**

1. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear cuja inversa existe.
   Prove que se $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente dependente em X então o conjunto $\{Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\}$ é linearmente independente em Y.

2 Seja X um espaço de Hilbert.
   (a) O que você pode afirmar sobre os funcionais lineares limitados definidos sobre X?
   (b) Existem funcionais lineares não-limitados (descontínuos)? Em caso afirmativo, mostre um.

3. Seja (e_n) um conjunto ortonormal total em um espaço de Hilbert H. Defina $T : H \to H$ tal que $Te_n = e_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$ .Determine a imagem $R(T)$, o núcleo $ker(T)$, a norma $\|T\|$ e o operador adjunto de Hilbert T^*.

4. (a) Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Defina o seu operador adjunto T^X , prove que ele também é limitado e que $\|T\| \leq \|T^\times\|$.
   (b) Prove que $(T^n)^\times = (T^\times)^n$.

5. Seja Y um sub-espaço fechado de um espaço de Hilbert H. Defina a projeção ortogonal P de H sobre Y e prove que o complemento ortogonal $Y^\perp$ é o núcleo de P. No caso em que $dim Y < \infty$, indique um procedimento para calcular Px, $x \in H$.

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Nome: ____ RA: _________________

Qualificação - 2006
18/08/2006

1. (a) Seja fuma quadrática com Hessiana definida positiva. Mostre que a partir de qualquer $x_k \in \mathbb{R}^n$ a direção de Newton satisfaz a condição de Armijo para $\alpha \leq 0{,}5$.

(b) No contexto da minimização irrestrita e de um modelo algorítmico baseado em direções de descida, nos quais a seqüência gerada satisfaz a condição de Armijo, o que você pode afirmar sobre a convergência global? E se acrescentarmos uma condição sobre o tamanho do passo, é possível garantir convergência a um ponto estacionário? Prove ou discuta os ingredientes em que você se basearia para construir um contra-exemplo bidimensional. Inclua a interpretação geométrica dos seus argumentos.

---

2. Chamamos de *problema de programação convexa* a

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.a & x \in K \end{array}$$

onde K é um conjunto convexo e f é uma função convexa. Provar que

(a) em um problema de programação convexa, todo minimizador local é global;
(b) o conjunto dos minimizadores é convexo;
(c) se f é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.

---

3. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \tfrac{1}{2} x^T Q x - b^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = \text{c}. \end{array}$$

Prove que x^* é um minimizador local se, e somente se, é um minimizador global (não há hipótese de convexidade sobre a função).

---

4. Verifique se $x^* = (2,2)^T$ satisfaz as condições suficientes de otimalidade para um minimizador do seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -x_1^2 x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 + x_1^2/2 = 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 0. \end{array}$$

o ponto x^* é regular?

---

5. Resuma os fatos principais dos métodos de penalização externa e Lagrangiano aumentado.

MT402 - MATRIZES - SEM. II / 2006

Exame de Qualificação ao Doutorado

1. Descreva de uma forma clara e sucinta o método da fatoração QR, via matriz de Hessenberg superior, para encontrar os auto-valores de A, matriz $n \times n$. Justifique o porquê do método.

---

2. Sejam $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_p]$ matriz $m \times p$, com $posto(A) = p$ e $B = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\ v_{p+1}]$ sendo que $v_{p+1} \in \text{span}\ \{ v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\}$. Considere os sistemas $Ax = b$ e $Bx = b$, onde b não pertence à $\mathrm{Im}(A)$.

   (a) Mostre que $y = \begin{pmatrix} A^+ b \\ 0 \end{pmatrix}$ é solução de quadrados mínimos de $By = b$.

   (b) Mostre que $\|A^+ b\| \geq \|B^+ b\|$.

---

3. (a) Considere a matriz 2×2, $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Imponha condições para que a iteração de Gauss-Seidel gere uma seqüência convergente para a solução de um sistema de equações lineares que tenha A por matriz de coeficientes.

   (b) Repita o exercício anterior, para a matriz $A = \begin{pmatrix} I_n & S \\ S^T & I_n \end{pmatrix}$, onde $S \in \mathrm{IR}^{n\times n}$.

---

4. Seja $u \in \mathrm{IR}^n$, $\| u \|_2 = 1$ e $B = I + \alpha\, uu^T$, $\alpha > 0$.

   (a) Exiba a fatoração SVD de B.

   (b) Mostre que $det(B) = 1 + \alpha$.

Justifique o que fizer.

BOA PROVA!

MT 601 - Exame de Qualificação - março de 2006
Métodos Computacionais em Otimização

Questão I

Considere o problema irrestrito min $f(x)$, $x \in \mathrm{IR}^n$.
Um modelo algorítmico para este problema pode ser assim escrito:

Enquanto $\|\nabla f(x_k)\| \neq 0$ faça:

passo 1: obtenha d_k uma direção de descida da f em x_k;

passo 2: obtenha um tamanho do passo λ_k conveniente;

passo 3: faça $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ e $k = k + 1$.

Reformule este algoritmo de acordo com os itens a seguir:

- escreva o passo 1 de modo que a direção gerada a cada iteração seja preferencial mente a de Newton;
- inclua testes para aceitar ou não a direção de Newton no passo 1;
- apresente alternativas no caso em que a direção de Newton não seja aceita; justifique as alternativas apresentadas;
- incorpore as condições sobre o vetor direção d_k e sobre o tamanho do passo, para que o algoritmo resultante tenha resultado de convergência global;
- justifique cada condição acrescentada, isto é, o que se pretende prevenir ou atingir incorporando cada uma delas ao algoritmo? (A explicação pode ser realizada através de gráficos, se necessário).

Questão II

Considere os métodos quase-Newton para resolução de um problema irrestrito:
min $f(x)$, $x \in \mathrm{IR}^n$.

1. Descreva os métodos quase-Newton e justifique a condição secante sobre a matriz B_{k+l} (ou H_{k+d}).

2. Considere a formula secante $H_{k+1} = H_k - \dfrac{H_k y_k y_k^t H_k}{y_k^t H_k y_k} + \dfrac{s_k s_k^t}{y_k^t s_k^t}$
onde $s_k = x_{k+1} - x_k$ e $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

Considere a matriz inicial como a Matriz Identidade: $H_0 = I$.
Obtido o vetor x_1, detalhe o procedimento computacional para obter o vetor s_1 de modo a obter $x_2 = x_l + s_1$.

Questão III
Considere o problema

$$\text{Minimizar } f(x) \text{ s. t. } Ax \geq b.$$

Descreva os passos essenciais de uma estratégia de restrições ativa. Discuta as questões relevantes à complementação de uma iteração deste método. Explique as razões pelas quais o método de restrições ativas encontra a solução do problema ou detecta que o problema não tem solução em um número finito de iterações.

Questão IV
Explique em que consiste a penalidade externa e suas propriedades. Discuta os aspectos negativos desta estratégia.

Exame de Qualificação ao Doutorado em Matemática Aplicada

MATRIZES - 13 / 03 / 2006

---

1. Suponha que $A \in IR^{m\times n}$, $y \in IR^m$ e $0 \neq s \in IR^n$. Mostre que: $E = \dfrac{(y - As)s^T}{s^T s}$ tem a menor norma-2 entre todas as matrizes m x n que satisfazem $(A + E)s = y$.

---

2. Seja A matriz $n \times n$ não singular, representada por colunas como $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$.

   (a) Mostre que $\mathrm{Cond}_\alpha(A) \geq \dfrac{\| a_i \|_\alpha}{\| a_j \|_\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq \infty$.

   (b) Use o item anterior para analisar possíveis comportamentos da resolução de sistemas de equações lineares que tenham A por matriz ele coeficientes.

---

3. Seja A matriz $n \times n$ singular e seja $A = M - N$, onde M é matriz não singular. Mostre que $p(M^{-1} N) < 1$ nunca é verdadeiro.

---

4. Dado $u \in IR^n$, .$\| u \|_2 = 1$, sejam $A = uu^T$ e $B = I + uu^T$.

   (a) Determine posto (A) e $N(A)$.

   (b) Calcule todos os auto-valores e auto-vetores de A.

   (c) Mostre que $\det(I + \alpha A) = 1 + \alpha\, uu^T$.

---

5. Descreva sucintamente como usar as Rotações de Givens e as Transformações de Householder para fazer a fatoração QR de A, matriz $m \times n$.
