IMECC-UNICAMP
Departamento de Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
Análise no $\mathbb{R}^n$
01/08/2005

OS PONTOS 1-2-3 SÃO OBRIGATORIOS
ESCOLHA EXATAMENTE DOIS (2) DOS PONTOS 4-5-6

****

1. Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $\mathbf{a} \in U$ com $f'(\mathbf{a}) = 0$, e $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a forma quadrática Hessiana de f no ponto $\mathbf{a}$, ou seja, para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathcal{H}(\mathbf{v}) =< A\mathbf{v}, \mathbf{v} >$ com $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right)$. Mostre que se $\mathcal{H}$ é negativa então $\mathbf{a}$ é um ponto máximo local não-degenerado de f.

2- (Princípio de Cavalieri) Sejam A e B conjuntos Jordan-mensuráveis no $\mathbb{R}^3$. Suponha que os conjuntos em $\mathbb{R}^2$,

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}, \ \ B_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in B\}$$

para $z \in \mathbb{R}$, também sejam Jordan-mensuráveis. Mostre que se $m(A_z) = m(B_z)$ para cada z então $m(A) = m(B)$.

3-Considere o seguinte 2-cubo singular no $\mathbb{R}^3$: $c : \ [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $c(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$,

$$x(s,t) = \cosh(t), \ \ y(s,t) = senh(t)\cos(\pi s), \ \ z(s,t) = senh(t)\, sen(\pi s)$$

considere também a 2-forma diferenciável $\omega = x^2 dx \wedge dy$.
(i) Calcule ∂c e faça um esboço de todas as faces.
(ii) Obtenha uma 1-forma ϕ tal que $d\phi = \omega$.
(iii) Verifique o teorema de Stokes, $\int_c \omega = \int_{\partial c} \phi$, calculando cada um dos termos pela definição.

****

4- Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$, restrita à esfera unitaria $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 = 1$ e mostre como daí se obtém a desigualdade de Schwarz, $| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > | \leqq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$.

5- Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano $\mathbb{R}^2$ (ou seja Ω não tem "buracos"). Considere para $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 o sistema differencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)). \end{cases} \qquad (*)$$

Suponha que o divergente de f, g, $div(f, g) = f_x + g_y$, é sempre positivo ou sempre negativo em Ω. Mostre que o sistema $(*)$ não tem solução periódica contida em Ω.

(Sugestão: Use o Teorema de Green)

6- a) Seja uma função continuamente diferenciável $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ com $m > n$, mostre que f não é injetora.

b) Seja A um conjunto Jordan-mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, mostre que existe um conjunto compacto e Jordan-mensurável C, $C \subset A$, tal que $\int_{A-C} 1 < \epsilon$.

Exame de qualificação Mestrado - Topologia - Dezembro 2005

NOME:

RA:

---

1) Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita, ou seja

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{U} \subset X \ : \ X - \mathcal{U} \text{ é finito}\}.$$

Determine se:

a) X é um espaço T_1.

b) X é Hausdorff.

c) X é compacto.

d) X é conexo.

---

2) Sejam A e B os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \ : \ 0 < x < 1\}, \\ B &= A \cup \{(0, y) \ : \ -1 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

a) Prove que A é conexo.

b) Prove que B é conexo.

---

3) Seja X um espaço topológico normal. Sejam U_1 e U_2 dois abertos de X tais que $X = U_1 \cup U_2$. Usando o lema de Urysohn prove que existem funções contínuas $f_1, f_2 : X \to [0,1]$ tais que:

- $f_1(x) + f_2(y) = 1$ para todo $x \in X$,
- $f_1(x) = 0$ para todo $x \in X - U_1$, e
- $f_2(x) = 0$ para todo $x \in X - U_2$.

---

4) Seja X um espaço topológico, seja $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e seja Y um conjunto y_0-estrelado de $\mathbb{R}^n$, ou seja $(1-t)y_0 + ty \in Y$ para todo $y \in Y$, $t \in [0,1]$. Dadas $f, g \in C(X, Y)$, prove que f e g são homotópicas entre si.

---

5) Sejam X e Y espaços topológicos, com X localmente compacto e Y Hausdorff. Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva, contínua e aberta. Dado um compacto $L \subset Y$, prove que existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(K) = L$.

Exame de qualificação Mestrado - Topologia - Dezembro 2005

NOME:

RA:

---

1) Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita, ou seja

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{U} \subset X \ : \ X - \mathcal{U} \text{ é finito}\}.$$

Determine se:

a) X é um espaço T_1.

b) X é Hausdorff.

c) X é compacto.

d) X é conexo.

---

2) Sejam A e B os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \ : \ 0 < x < 1\}, \\ B &= A \cup \{(0, y) \ : \ -1 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

a) Prove que A é conexo.

b) Prove que B é conexo.

---

3) Seja X um espaço topológico normal. Sejam U_1 e U_2 dois abertos de X tais que $X = U_1 \cup U_2$. Usando o lema de Urysohn prove que existem funções contínuas $f_1, f_2 : X \to [0, 1]$ tais que:

- $f_1(x) + f_2(y) = 1$ para todo $x \in X$,
- $f_1(x) = 0$ para todo $x \in X - U_1$, e
- $f_2(x) = 0$ para todo $x \in X - U_2$.

---

4) Seja X um espaço topológico, seja $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e seja Y um conjunto y_0-estrelado de $\mathbb{R}^n$, ou seja $(1-t)y_0 + ty \in Y$ para todo $y \in Y$, $t \in [0, 1]$. Dadas $f, g \in C(X, Y)$, prove que f e g são homotópicas entre si.

---

5) Sejam X e Y espaços topológicos, com X localmente compacto e Y Hausdorff. Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva, contínua e aberta. Dado um compacto $L \subset Y$, prove que existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(K) = L$.

nome:

EQM do IMECC, Análise no $\mathbb{R}^n$, dezembro/2005

OS PONTOS 1-2-3 SÃO OBRIGATORIOS

ESCOLHA EXATAMENTE DOIS (2) DOS PONTOS 4-5-6

****

(1) (a) Sejam $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ e $p > 0$, $q > 0$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mostre que

$$xy \leqq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(Sugestão: Minimize $f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ sujeito ao vínculo $xy = 1$).

(b) Dado $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$, ponha $|\mathbf{v}|_p = (\Sigma_i |v_i|^p)^{1/p}$. Use a desigualdade acima para provar que se, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ vale a *Desigualdade de Hölder*, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > \leqq |\mathbf{u}|_p |\mathbf{v}|_q$.

(2) Enuncie e demonstre a forma local das submersões.

(3) Considere o seguinte 2-cubo singular no $\mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
c: \ [0,1]^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
c(s,t) &= (x(s,t), y(s,t)) \\
x(s,t) &= s\ senh(t) \\
y(s,t) &= s\ cosh(t)
\end{aligned}
$$

considere também a 2-forma diferenciável $\omega = dx \wedge dy$.

(i) calcule ∂c e faça um esboço de todas as faces.

(ii) obtenha uma 1-forma ϕ tal que $d\phi = \omega$.

(iii) verifique o teorema de Stokes, $\int_c \omega = \int_{\partial c} \phi$, calculando cada um dos termos pela definição.

(4) Mostre que o teorema de Stokes enunciado na sua forma geral, $\int_c d\phi = \int_{\partial c} \phi$, com o emprego de formas, implica no teorema da divergência de Gauss. Mostre que a 2-forma ω no $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$\omega = \frac{x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

é fechada mas não é exata.

(5) Seja $C \subseteq A$ para algum rectângulo fechado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que a função característica $\chi_C : A \to \mathbb{R}$ é integravel se, e somente se, a fronteira de C tem medida nula.

(6) Seja $f = f(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 talque $f(0,0) = 0$ e $f_t(0,0) \neq 1$. Prove que a equação differencial,

$$f_t(x, \xi(x))\xi'(x) + f_x(x, \xi(x)) = \xi'(x),$$

tem uma única solução ξ de classe C^1 definida em uma pequena vizinhança do zero with $\xi(0) = 0$.

(Sugestão: Considere a função $H(x,t) = f(x,t) - t$)

IMECC–UNICAMP
Departamento de Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
Análise no $\mathbb{R}^n$, 05/05/2005

1. (2,0) Calcule a derivada da função determinante
$det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\cancel{n}}$,

$$det(\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n) \equiv det \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{v}_n \end{bmatrix}; \quad \mathrm{v}_1 \in \mathbb{R}^n, \cdots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^n.$$

2. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1. Prove que

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))\, dt\, (y-x)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. (2,0) Seja $f = f(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 tal que $f(0,0) = 0$ e $f_t(0,0) \neq 1$. Prove que a equação $f(x, \overset{t}{\cancel{y}}) - t = 0$ define t implicitamente como uma função de x (localmente). Calcule $\nabla_x t$.

4. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ uma submersão de classe C^1. Prove que f é uma aplicação aberta.

5. Seja $f = (f_1, \cdots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1.
a) (1,0) Calcule a diferencial exterior da forma
$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i\, df_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{df_i} \wedge \cdots \wedge df_n$.
b) (1,0) Denote por $J(x) = \det[f'(x)]$ o determinante jacobiano de f no ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio compacto com fronteira ∂D suave (pode supor de classe C^∞). Se $f(x) = 0$ para todo $x \in \partial D$, prove que $\int_D J(x)\, dx = 0$.

Exame de qualificação - Topologia Geral - Agosto 2005

NOME:

RA:

---

1) Sejam X e Y espaços topológicos. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que:

1a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

1b) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

---

2) Seja $\{X_i \ : \ i \in I\}$ uma família de espaços topológicos. Seja $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$.

2a) Prove que $\overline{(\Pi_{i\in I} A_i)} = \Pi_{i\in I}\overline{A_i}$.

2b) Prove que $(\Pi_{i\in I} A_i)^\circ \subset \Pi_{i\in I} A_i^\circ$.

2c) Exiba um exemplo onde $(\Pi_{i\in I} A_i)^\circ \neq \Pi_{i\in I} A_i^\circ$.

---

3) Seja $O(2)$ o conjunto de todas as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tais que $\det(A) = \pm 1$. Considere $O(2)$ como subespaço de $\mathbb{R}^4$.

3a) Prove que a função $O(2) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}$ é contínua.

3b) Prove que $O(2)$ é desconexo.

---

4) Sejam X e y espaços topológicos, com Y Hausdorff. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções contínuas tais que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in X$.

a) Prove que X é Hausdorff.

b) Prove que $f(X)$ é fechado em Y.

---

5) Seja X um espaço topológico, e seja C um subconjunto de X que é conexo, aberto e fechado. Prove que C é uma componente conexa de X.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO

Álgebra linear

Dezembro, 2005

Resolver 5 exercícios

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por $T(i) = i - j$ e $T(j) = i + 3j$.

a) Escrever a matriz de T, A, na base (canônica) i, j de $\mathbb{R}^2$.

b) Encontrar a forma de Jordan de T e a respectiva base de Jordan.

c) Calcular a matriz A^{100}.

2. a) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz nilpotente. Quais as raízes características de A?

b) Se A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, mostrar que o traço de $AB - BA$ é igual a 0.

c) Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz cujos autovalores são $1 + \sqrt{-1}$, $2 - \sqrt{-1}$, $3 - \sqrt{-1}$, e $4 - \sqrt{-1}$. Demonstre que $\det A = 40 - 10\sqrt{-1}$.

d) Mostrar que o espaço vetorial $M_n(\mathbb{C})$ sobre os complexos não possui base que consiste de matrizes nilpotentes.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as suas respostas.

a) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $A^k = I_n$ para algum k. A forma canônica de Jordan de A pode conter bloco $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\alpha^k = 1$?

b) Se V é um espaço vetorial com $\dim V = n < \infty$ e T é um operador linear em V, então $\ker T \cap \operatorname{im} T = 0$.

c) Todo operador linear T em $\mathbb{R}^3$ possui subespaço invariante $V \neq 0$, $\mathbb{R}^3$.

d) Seja $f(X)$ o polinômio característico de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Se $f(0) \neq 0$, então $\det A \neq 0$.

e) Sabendo-se que a uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ e sua inversa A^{-1} têm todos os coeficientes números inteiros, podemos dizer que $\det A = \det A^{-1}$?

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Mostre que para todo subespaço W de V temos $V = W \oplus W^\perp$, onde $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0, \text{ para todo } w \in W\}$, é o complemento ortogonal de W.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.

a) Definir produto interno (também chamado de produto escalar) em V.

c) Dado um operador linear $T: V \to V$ Em que condições podemos dizer que exite uma base ortonormal de V na qual a matriz de T é diagonal?.

d) Definir o dual $\widetilde{V}$ de V e determinar sua dimensão em função da dimensão de V.

6. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz, e seja $p = p(A)$ o posto de A. Denotamos por $p^* = p(A^*)$ onde A^* é a adjunta de A. (Recordamos que $AA^* = A^*A = (\det A)I_n$.) Calcular p^* em função de p.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO

Álgebra linear

Dezembro, 2005

Resolver 5 exercícios

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por $T(i) = i - j$ e $T(j) = i + 3j$.

a) Escrever a matriz de T, A, na base (canônica) i, j de $\mathbb{R}^2$.
b) Encontrar a forma de Jordan de T e a respectiva base de Jordan.
c) Calcular a matriz A^{100}.

2. a) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz nilpotente. Quais as raízes características de A?
b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, mostrar que o traço de $AB - BA$ é igual a 0.
c) Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz cujos autovalores são $1 + \sqrt{-1}$, $2 - \sqrt{-1}$, $3 - \sqrt{-1}$, e $4 - \sqrt{-1}$. Demonstre que $\det A = 40 - 10\sqrt{-1}$.
d) Mostrar que o espaço vetorial $M_n(\mathbb{C})$ sobre os complexos não possui base que consiste de matrizes nilpotentes.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as suas respostas.
a) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $A^k = I_n$ para algum k. A forma canônica de Jordan de A pode conter bloco $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\alpha^k = 1$?
b) Se V é um espaço vetorial com $\dim V = n < \infty$ e T é um operador linear em V, então $\ker T \cap \operatorname{im} T = 0$.
c) Todo operador linear T em $\mathbb{R}^3$ possui subespaço invariante $V \neq 0, \mathbb{R}^3$.
d) Seja $f(X)$ o polinômio característico de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Se $f(0) \neq 0$, então $\det A \neq 0$.
e) Sabendo-se que a uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ e sua inversa A^{-1} têm todos os coeficientes números inteiros, podemos dizer que $\det A = \det A^{-1}$?

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Mostre que para todo subespaço W de V temos $V = W \oplus W^{\perp}$, onde $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0,\ \text{para todo } w \in W\}$, é o complemento ortogonal de W.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.
a) Definir produto interno (também chamado de produto escalar) em V.
c) Dado um operador linear $T: V \to V$ Em que condições podemos dizer que exite uma base ortonormal de V na qual a matriz de T é diagonal?.
d) Definir o dual $\widetilde{V}$ de V e determinar sua dimensão em função da dimensão de V.

6. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz, e seja $p = p(A)$ o posto de A. Denotamos por $p^* = p(A^*)$ onde A^* é a adjunta de A. (Recordamos que $AA^* = A^*A = (\det A)I_n$.) Calcular p^* em função de p.

Exame Qualificação - Álgebra Linear - 03/08/2005

1. Dado o espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ sobre os complexos seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o operador

$$T(x, y, z) = (ax + bz, ay + cz, az),$$

onde a, b e c são números complexos.

(a) Encontrar a matriz de T na base canônica.

(b) Achar uma base de Jordan (em função de a, b, c) para T, e a matriz de T em relação à base de Jordan.

2. Dada a forma quadrática $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) := 2x^2 - y^2 + 3xy$ econtre uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ e escalares a e b tais que para todo vetor do $\mathbb{R}^2$, $(x, y) = \alpha e_1 + \beta e_2$, se tenha $\varphi(x, y) = a\alpha^2 + b\beta^2$.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. (Respostas sem a devida justificativa não serão consideradas.)

a) Se $\dim V = n$ então $V \otimes V \cong M_n$.

b) Se T é um operador ortogonal em $\mathbb{R}^n$, então existe uma base ortonormal, que consiste de autovetores de T.

c) Todo subespaço próprio de um espaço V de dimensão n é uma interseção finita de subespaços de dimensão $n - 1$.

d) A matriz de um operador T de um espaço vetorial V em relação a uma base $\mathcal{C}$ é igual a matriz, tomada em relação a mesma base, da bilinear $B(u, v) = \langle u, T(v)\rangle$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto escalar sobre V.

e) Os autovetores de um operador invertível T coincidem com os autovetores de T^{-1}.

f) Seja $J = J(\lambda, k)$ um bloco de Jordan $k \times k$ com λ na diagonal principal (e 1 na diagonal acima da principal). Então a forma canônica de Jordan de J^2 consiste de um bloco de Jordan.

g) Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $T^k = I$ para algum $k \geq 1$, então na forma canônica de Jordan de T há bloco $k \times k$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

a) Mostrar que T é uma involução (isto é $T^2 = T$) se e somente se $\mathbb{R}^n$ é uma soma direta de subespaços V_0 e V_1 tais que $T|_{V_0} = \mathrm{Id}$, onde Id é a transformação identidade, e $T|_{V_1} = -\mathrm{Id}$.

b) Mostrar que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ que consiste de autovetores de T.

c) Demonstre que T é normal se e somente se V_0 é ortogonal a V_1.

d) Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_k$ involuções, distintas duas a duas, em $\mathbb{R}^n$ tais que $T_iT_j = T_jT_i$ para quaisquer i e j. Mostrar que $k \leq 2^n$.

Boa Prova