UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2005

EXAME DE QUALIFICAÇÃO – 12/08/2005

1ª Questão

(a) Apresente um esquema implícito para a equação difusiva 1D (no espaço) e seu respectivo erro de truncamento.

(b) Apresente um esquema explícito para a equação difusiva 1D (no espaço) e seu respectivo erro de truncamento.

(c) Analise a estabilidade e a convergência do esquema do item (a).

(d) Analise a estabilidade e a convergência do esquema do item (b).

2ª Questão

(a) Mostre que

$$D_3 = \frac{1}{6h}\{2\, u(\bar{x}+h) + 3\, u(\bar{x}) - 6\, u(\bar{x}-h) + u(\bar{x}-2h)\},$$

é uma discretização consistente com $u'(\bar{x})$ e apresente seu erro de truncamento.

(b) Apresente uma discretização para $u_t + u_x = O$ com aproximação de 2ª ordem no tempo e 3ª no espaço.

3ª Questão
Deduza um método numérico de segunda ordem para o problema

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x > 0$$

$$y(0) = a \text{ e } y'(0) = b.$$

Apresente o algoritmo para seu método.

Boa Prova!

Exame de Qualificação de 2005. (11 de março)

<u>Questão 1</u>
Considere o PVIVC condições iniciais e de contorno para $u_t + u_x = bu_{xx}$.
1.a) (1.0 pto) Aplicando discretizações de segunda ordem nas derivadas espaciais, estabeleça o PVI

$$\begin{cases} v(t) = F(t, v(t)) \\ C\,I \end{cases}$$

1.b) (1.0 pto) Considere agora a seguinte discretização da variável tempo

$$w^{n+1} = w^n + (1 - \theta)\,\Delta t\, F(t_n\ , w^n) + \theta\,\Delta t\, F(t_{n+1}\ , w^{n+1})$$

$$w \in R^{\mathrm{N}}\ ,\ 0 \leq \theta \leq 1.$$

Escolhendo valores adequados de θ, obtenha os três métodos mais usados para calcular aproximações da solução do PVIVC. Comente sobre os erros de truncamentos destes três métodos.

l.c) (1.5 pto) Considerando o caso $a = 0$, apresente a análise de estabilidade e convergência de um dos métodos da questão anterior.

1.d) (1.0 pto) Que condições de contorno você apresentaria nos seguintes casos
(i) $a = 0$ (ii) $b = 0$ (iii) $b \approx 0$.

<u>Questão 2</u>
2.a) (1.0 pto) Deduza os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem comentando sobre os erros de truncamento e convergência.

2.b) (1.5 pto) Quais destes métodos seriam equivalentes aos métodos apresentados em l.b).

2.c) (1.0 pto) O que são métodos de passo variável para PVI? Quais são suas vantagens e desvantagens? Exemplifique um destes métodos para Runge Kutta de segunda ordem. Seria possível usar métodos deste tipo em problemas de valor inicial e de contorno?

<u>Questão 3</u> (1.0 pto)
Descreva o que você entende por dispersão e dissipação de métodos numéricos para EDP.

<u>Questão 4</u> (1.0 pto)
Considere a equação advecção-difusão, 2D na variável espacial. Comente sobre métodos explícitos e implícitos para este tipo de problema dando destaque aos seguintes pontos.
(i) Vantagens e desvantagens de cada tipo; (ii) Possibilidades para amenizar os problemas computacionais dos métodos implícitos, agravados na passagem 1D para 2D.

DMA - IMECC - UNICAMP Março 2005

Exame de Qualificação em Análise Aplicada

Profs.: Mario Martinez. Roberto Andreani & Lúcio Santos

Questão 1: Seja X o espaço de todas as seqüências reais $x = (x_j)$, munido da norma $||x|| = \sup_{j\in IN}|x_j|$. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações, justificando cuidadosamente:

(a) $A = \{x \in X \mid x$ tem um número finito de elementos diferentes de zero$\}$ é completo.

(b) $B = \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ é compacto.

Questão 2: Sejam Q o conjunto dos números racionais munido da distância $D(p, q) = |p - q|$ e $S = \{p \in Q \mid 2 < p^2 < 3\}$, Prove que S é fechado e limitado em Q mas não é compacto: O conjunto S é aberto em Q?

Questão 3: Sejam W um espaço vetorial normado e D uma distância sobre W. Prove que D provém de uma norma se e somente se temos que $D(x + z, y + z) = D(x, y)$ e $D(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|D(x , y)$.

Questão 4: Sejam H um espaço de Hilbert e T uma contração em H.

(a) O que se pode afirmar sobre os funcionais lineares limitados definidos sobre H?

(b) Existem funcionais lineares não-limitados em H? Em caso afirmativo, exiba um exemplo.

(c) O que se pode afirmar sobre a convergência da seqüência definida por $x_{k+1} = T(x_k)$, $k = 0,1. . .$?O que poderia acontecer se H não fosse completo?

Qualificação 2005 - Matrizes

Questão 1: Discutir como usar as matrizes de Householder, (I - $2uu^T$) com $u \in$ IR^n unitário, para obter a Fatoração QR de uma matriz.

Questão 2: Dados

$$A = \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & v \end{pmatrix} \;,\; b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

onde $R \in$ IR^{kxk}, $w \in$ IR^k $v \in$ IR^{n-k}, $c \in$ IR^k e $d \in$ IR^{n-k}.
Provar que se A tem posto completo, então

$$\min \|Ax - b\|^2 = \|d\|^2 - \left(\frac{v^T d}{\|v\|}\right)^2$$

Questão 3: (a) Uma matriz que tem todos os autovalores iguais a zero é igual à matriz nula? Se a resposta é negativa com que condição a pergunta tem uma resposta positiva?
(b) sejam $u, v \in$ IR^n vetores unitários e ortogonais, achar a forma de Schur de $I + uv^T$.

Questão 4: Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $(\lambda\ ,\ \upsilon)$ um par de autovalor e autovetor associados, com $\|\upsilon\| = 1$. Se $q \in \mathbb{C}^n$ com $\|q\| = 1$ e $\rho = q^H Aq$. Provar que: $|\ \lambda - \rho\ | \leq 2\ \|A\|\ \|\upsilon - q\|$.

DMA - IMECC - UNICAMP Março 2005

Exame de Qualificação em Matrizes

Profs.: Mario Martinez. Roberto Andreani & Lúcio Santos

Questão 1: Sejam $u \in IR^m$. $v \in IR^n$ vetores não nulos e definimos $A = uv^T$. Determine:

(a) O posto e a imagem de A.

(b) $||A||_2$

(c) O conjunto solução e a solução de norma-2 mínima para o problema de minimizar $||Ax - b||_2^2$, nos dois casos seguinte: (i) b é ortogonal a u; (ii) $b = \alpha$ u. $\alpha \neq 0$.

Questão 2: Seja $0 \neq u. \in IR^n$ e considere a matriz de Householder $H = I - 2\,\dfrac{uu^T}{u^Tu}$, onde I é a matriz identidade de ordem *n.* Determine (a) os autovalores. (b) determinante e (c) os valores singulares de H. Para os autovalores forneça um argumento geométrico.

Questão 3: Seja $P \in IR^{n\times n}$ um projetor ortogonal sobre um subespaço $S \subset IR^n$ cuja dimensão é *m* e sejam $\{u_1, . . . u_m\}$ uma base ortonormal de *S.*

(a) Achar uma decomposição em valores singulares de P.
(b) Provar que traço(P) = posto(P).

Questão 4: Sejam $A \in IR^{n\times n}$ e $b \in IR^n$ tais que o sistema Ax = b tem solução única x. Dado $x_o \in IR^n$ defina a seqüência $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$, $k = 0.1, . . .$, onde I é a matriz identidade de ordem *n.* Suponha que a matriz I - A é simples e que seus autovalores são tais que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Acrescentando qualquer hipótese adicional que achar necessária, prove que:

(a) $\lim_{k\to\infty} \dfrac{||x_{k+1} - x_*||_2}{||x_k - x_*||_2} = \lambda_1.$

(b) Se $|\lambda_1| < 1$ então $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*.$
