UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2004

Exame de Qualificação - 11/02/2004
Análise Aplicada

1. (2.0 Pontos) Mostre que se uma seqüência de funções contínuas $\{x_n\}$ em $[a, b]$ converge uniformemente, a função limite x é contínua em $[a, b]$.

2. (2.0 Pontos) Mostre que, num espaço normado de dimensão finita, todo operador linear é limitado.

3. Seja l^p, $p \geq 1$, o espaço das seqüências $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ tais que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots$ converge.

   (a) (1.0 ponto) Mostre que, para $1 \leq p < \infty$, l^p é separável.

   (b) (1.0 ponto) Mostre que l^∞ é não separável.

4. (2.0 Pontos) Mostre que o espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$, $C[a, b]$, munido da norma

$$||x|| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

   não é um espaço de Hilbert.

5. Sejam M e N espaços métricos.

   (a) (1.0 Ponto) Defina uma contração $f : M \to N$.

   (b) (1.0 Ponto) Mostre que toda contração é uma aplicação uniformemente contínua.

Exame de Qualificação (13-02-2004)

Matrizes.

Q1 - Suponha que $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}$, $y \in \mathrm{IR}^m$ e $0 \neq s \in \mathrm{IR}^n$. Mostre que: $E = \dfrac{(y - As)s^T}{s^Ts}$ tem a menor norma-2 entre todas as matrizes que satisfazem $(A + E)s = y$.
(Dado $\|uv^T\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$).

Q2 - Seja $A \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ simétrica definida positiva e considere o seguinte procedimento:
$A_0=A$
For $k = 1,2, \ldots$
$\quad A_{k-1} = G_kG_k^T$ % Cholesky
$\quad A_k = G_k^TG_k$
End.

(a) Mostre que o procedimento está bem definido, ou seja, para todo $k = 1,2, \ldots$ é possível executar as instruções.

(b) Mostre que, para todo k, a matriz A_k tem os mesmos autovalores que a matriz A.

Q3 - Sejam: $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ com $n \geq m$, A posto completo; $b \in \mathrm{IR}^m$ e $S = \{x \in \mathrm{IR}^n \mid Ax = b\}$.

(a) Mostre que S é não vazio.
(b) Utilizando fatorações ortogonais, encontre a solução x^* de norma-2 mínima em S.

Q4 - Dados $A \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ e L, U sua fatoração LU com L triangular inferior com diagonal unitária e U triangular superior.

(a) Encontre a fatoração LDV de A, em termos de L e U.

(b) Se A é simétrica mostre que a fatoração do item anterior se transforma em LDL^T.

(c) Se A é também definida positiva, mostre que os elementos da diagonal principal de D são todos estritamente positivos.

(d) Utilizando os itens anteriores, exiba a fatoração de Cholesky de A.

Q5 - Sejam $x \in \mathrm{IR}^n$, $y \in \mathrm{IR}^n$ e $A = xy^T$.

Qual a decomposição em valores singulares de A?

Exame de Qualificação ao Doutorado

Matrizes - 11/08/2004

Questão 1 - Seja $y \in \mathrm{IR}^n$ e considere a matriz A, $n \times n$, dada por A = $(I - y\bar{e}_k^T)$, onde $\bar{e}_k^T$ é a k-ésima linha da matriz identidade.

(a) Dado, $r \in \mathrm{IR}^n$, sob que condições podemos encontrar y $\in \mathrm{IR}^n$ tal que $Ax = \bar{e}_k$?

(b) Exiba uma fórmula para A^{-1} supondo A inversível.

(c) Escreva um algoritmo "eficiente" que calcule A^{-1}.

Questão 2 - Dado $u \in \mathrm{IR}^n$, $\|u\|_2 = 1$, sejam A = uu^T e B = $I + uu^T$.

(a) Determine posto(A) e $N(A)$.

(b) Calcule todos os auto-valores e auto-vetores de A.

(c) Mostre que B é simétrica, definida-positiva.

Questão 3 - Sejam A e $B \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ com $m > n$.

(a) Im(B) = Im(A), mostre que $x \in \mathrm{IR}^n$ é solução do problema

$$\min_x \|Ax - \mathrm{B}\|_2$$

se e somente se $B^T Ax = B^T b$.

(b) Mostre que Im(B) = 1m (A) se existe $C \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ não singular, tal que $A = BC$.

(c) Suponha A de posto completo e considere sua fatoração QR, com $Q \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ e $R \in \mathrm{IR}^{m\times n}$. Existe alguma relação entre Im(A) e Im(Q)? Justifique.

Questão 4 - Descreva o método da fatoração QR para o cálculo dos auto-valores de A, matriz $n \times n$. Enfatize, por exemplo, a necessidade de transformar A em H, matriz de Hessenberg superior semelhante a A e a parte iterativa do método.

Questão 5 - Seja Q_0 matriz $n \times n$ não ortogonal e seja USV^T sua fatoração SVD. Mostre que a matriz Q_1 que resolve o problema: minimizar $\|Q - Q_0\|_F$, Q no conjunto das matrizes ortogonais, é a matriz $Q_1 = UV^T$. (Lembrete: $\|B\|^2_F = \mathrm{tr}(B * B^T)$).