UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2003

Exame de Qualificação de Análise Aplicada

10 de fevereiro de 2003

1. Defina conjunto compacto de duas maneiras diferentes e prove sua equivalência.

2. Considere o espaço das funções contínuas $[0, 1] \to IR$ com a norma

$$\| f \| = \max_{x \in [0,1]} \{f(x)\}.$$

Seja

$$B = \{f \in E \mid 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall \ x \in [0, 1]\},$$

B é compacto? Qualquer que seja sua resposta, prove.

3. Seja H um espaço de Hilbert. Sejam (x_k) e (y_k) duas seqüências em H tais que

$$\| x_{k+1} \| \leq (x_k , y_k)$$

e

$$\| y_{k+1} \| \leq (x_k , y_k)$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$
Prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|x_0\| \leq \varepsilon$ e $\|y_0\| \leq \varepsilon$, tem-se

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} y_k = 0.$$

4. Defina separabilidade. Relacione este conceito com a existência de seqüências ortonormais totais nos espaços adequados.

5. Enuncie e prove o Teorema de Contração. Mostre com um contra-exemplo que a tese não é válida se o espaço não é completo.

Exame de Qualificação (12-02-2003)- Matrizes

E-1- Sejam $x \in IR^n$ nn e $e = (1,1, \dots ,1)^t$ tal que $x^te = 0$. Provar que

$$|x^ty| \leq ||x||_1 \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \quad \forall\, y \in IR^n$$

E-2- Provar que as seguintes proposições são equivalentes:

(a) $N(A) = N(A^2)$;

(b) $Im(A) = Im(A^2)$;

(c) $Im(A) \cap N(A) = \{0\}$,

onde $N(A)$ e $Im(A)$ denotam o núcleo e a imagem da matriz A respectivamente.

E-3- Demonstre que a solução geral da equação $Ax = b$ com $A \in IR^{n\times m}$ é,

$$x = A^+ b + (I- A^+A)h,$$

com $h \in IR^n$, A^+ denota a pseudoinversa da matriz A.

E-4- Seja $A \in IR^{n\times m}$, cuja decomposição em valores singulares é dada por

$$U^tAV = diag(\sigma_1 , \dots , \sigma_p),$$

com $p = min\{m,n\}$, $U = [u_1,\dots,u_m] \in IR^{m\times m}$ $V = [v_1,\dots,v_n] \in IR^{n\times n}$ e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_p \geq 0$.

Se posto$(A) = r$, $k < r$ e $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i v_i v_i^t$ provar que

$$min_{posto(B)=k} ||A - B|| = ||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}.$$

E-5- Para cada uma das seguintes afirmações, justifique se verdadeira ou falsa.

(a) O método *QR* para cálculo de autovalores é sempre convergente, (para uma solução).

(b) As matrizes simétricas de $IR^{n\times m}$ são densas no conjunto das matrizes normais de $n \times n$.