UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2002

Exame de Qualificação - 18/03/2002
Análise Aplicada

1. (2.0 Pontos) Seja $T : H \to H$ um operador limitado, linear e auto-adjunto e H um espaço de Hilbert. Mostre que $T^n : H \to H$, n inteiro positivo, também é limitado, linear e auto-adjunto.

2. (2.0 Pontos) Em l^2, considere a sequência $\{T_n\}$, com $T_n : l^2 \to l^2$ definido por

$$T_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \ldots).$$

(a) (0.5 Ponto) Mostre que T_n é linear e limitado.

(b) (0.5 Ponto) T_n possui inverso? Por que?

(c) (0.5 Ponto) Mostre que $\{T_n\}$ converge fortemente em l^2.

(d) (0.5 Ponto) Mostre que $\{T_n\}$ não converge uniformemente em l^2.

3. (3.0 Pontos) Seja H um espaço de Hilbert separável e $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ uma de suas bases ortonormais. Considere o operador linear T tal que $Te_n = \frac{i}{n+1} e_{n+1}$.

(a) (0.5 Ponto) Mostre que T é limitado e determine T^*.

(b) (0.5 Ponto) Encontre os pontos fixos de T em H.

(c) (1.0 Ponto) Mostre que a seqüência de operadores $\{(TT^*)^n\}$, $n = 1,2,3,\ldots$,, converge fortemente em H.

(d) (1.0 Ponto) Mostre que $S = (I + T^*T) : H \to H$, é limitado e possui inverso, também limitado.

4. (3.0 Pontos) Seja $C^1[0,1]$ o conjunto das funções reais diferenciáveis no intervalo $[0,1]$.

(a) (1.0 Ponto) Mostre que

$$d(x,y) = \int_0^1 \|x(t) - y(t)\|\, dt$$

com $x, y \in C^1[0,1]$, define uma métrica em $C^1[0,1]$.

(b) (2.0 Ponto) Mostre que $C^1[0,1]$, com a métrica acima, não é completo.

Exame de Qualificação (20-03-2002). Matrizes

E-1 Seja P uma matriz quadrada real tal que $P^2 = P$. Demonstre que P é diagonalizável.

E-2 Dada uma matriz real quadrada A, justifique (demonstração ou contraexemplo) se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
(a) O posto de A é igual ao número de valores singulares não nulos.

(b) O posto de A é igual ao número de autovalores não nulos.

(c) A é o limite de uma seqüência de matrizes de posto completo.

E-3 Dada uma matriz real quadrada A, demonstre que existe uma matriz unitária V, tal que V^*AV é uma matriz triangular. V pode ser sempre real?

E-4 Sejam A, B e C matrizes reais com dimensões apropriadas tal que o produto A^tCB^t está bem definido. Seja χ o conjunto das matrizes X que minimizam $\|AXB - C\|_F$ e seja X_0 o único elemento de χ tal que minimiza $\|X\|_F$. Demonstre que $X_0 = A^+CB^+$. ($\|.\|_F$ denota a norma de Frobenius e A^+ a pseudoinversa de A).

JUSTIFIQUE TUDO!!!!!!!

Exame de Qualificação (31-07-2002). Matrizes.

JUSTIFIQUE TUDO!!!!!! Lembre-se de explicar a notação adotada.

E-1- Seja A uma matriz real com a propriedade [$Az \geq 0$ implica que $z \geq 0$] ($\geq$ indica componente a componente). Demonstre que

(i) A é não singular;

(ii) $A^{-1} \leq 0$.

E-2- Responda a seguinte pergunta: É verdadeiro que toda matriz simétrica tem uma decomposição da forma LDL^t, onde L é triangular inferior e D diagonal? Se tiver a decomposição, é única?

E-3- Demonstre que, se $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}$ tem posto n, então $A + E$ também tem posto n quando satisfeita a condição $\|A^+\|_2 \|E\|_2 < 1$.

E-4- Seja N o conjunto das matrizes normais em $C^{m\times n}$. Demonstre que o interior do fecho de N é vazio.

E-5- Demonstre a equivalência entre o método QR e o método de Iteração Simultânea (com pontos iniciais convenientes).

JUSTIFIQUE TUDO!!!!!!! Lembre-se de explicar a notação adotada.