



Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2001

ANÁLISE APLICADA - 14 de Março de 2001**1 :**

a) Mostre que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz implica

$$\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 .$$

b) Dê um exemplo de um conjunto fechado e limitado, mas que não é compacto (e prove).

2 :Mostre que o subconjunto $M = \{x = (x_j) \text{ tal que } \sum_{j=1}^n x_j = 1\} \subset \mathbb{C}^n$ é completo e convexo.**3 :**a) Seja X espaço normado. Mostre que $U \subset X$ é limitado se $\|x\| \leq c, \forall x \in U$, para algum $c \in \mathbb{R}$.b) Sejam X e Y espaços normados. Mostre que o operador linear $T : X \rightarrow Y$ é limitado se e somente se T leva conjuntos limitados em X em conjuntos limitados em Y .**4 :**

a) Enuncie o Teorema do ponto fixo de Banach

b) Seja (X, d) com

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

espaço métrico de dimensão finita, com X espaço vetorial. Considere o sistema de N equações lineares $x = Cx + b$ onde $C = (C_{jk})$ é matriz $n \times n$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ vetor fixo de X . Considerando a aplicação $T : X \rightarrow X$, com $y = T_x = Cx + b$, encontre qual é a condição sobre a matriz C para que T seja uma contração.

Exame de Qualificação (novembro 2001). Matrizes

E-1 É verdadeiro que se P é uma matriz tal que (i) $P^2 = I$, (ii) $P^t = P$ e (iii) $I - P$ tem posto 1, então P é uma reflexão de Householder.

E-2 Provar que se P e Q são matrizes simétricas positivas semidefinidas, então

$$\text{tr}(PQ) \leq \text{tr}(P)\rho(Q),$$

onde tr é o traço e ρ o raio espectral.

E-3 Provar que $\|A\|_2 = \sigma^{1/2}$ onde σ é o maior autovalor de $A^T A$.

E-4 Mostre que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o limite de uma seqüência de matrizes de posto completo.