UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

2000

ANÁLISE APLICADA - 18 de Setembro de 2000

Prova

1 :

a) Seja $Y \subset l^{\infty}$, o conjunto de todas as seqüências que têm somente um número finito de termos não nulos. Mostre que Y é um subespaço de l^{∞}, mas não é um subespaço fechado.

b) Use o exemplo do item a) para mostrar que a convergência $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|$ não implica necessariamente a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sugestão: Considere $(x_n) \in Y$ onde $x_n = \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty}$ com $x_n^{(n)} = 1/n^2$ e $x_j^{(n)} = 0,\ \forall j \neq n$.

2 :

a) Seja V um espaço vetorial e h uma forma *Hermitiana* sobre $V \times V$. Esta forma é denomina *positiva semi-definida* se $h(x,x) \geq 0$ para todo $x \in V$. Mostre então que h satisfaz a Desigualdade de Schwarz: $|h(x,y)|^2 \leq h(x,x)h(y,y)$.

b) Mostre daí que a função $p(x) = \sqrt{h(x,x)}$ define uma seminorma sobre V.

3 :

Seja $T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, definida por $y(t) = (Tx)(t) = \int_0^t x(r)\, dr$. Encontre o conjunto-imagem de T, Im(T), e o operador inverso $T^{-1} : \text{Im}(T) \rightarrow C[0,1]$. T^{-1} é linear? é um operador limitado (contínuo)?

4:

Em análise uma condição suficiente usual para a convergência de uma iteração $x_n = g(x_{n-1})$ que g seja uma função continuamente diferenciável (de classe C^1) e que $|g'(x)| \leq \alpha < 1$.

a) Verifique isto usando o Teorema do ponto fixo de Banach.
b) Mostre que uma função de iteração para calcular a raiz quadrada de um dado número positivo c é $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n)$.
c) Que condição de convergência se obtém do item a) quando aplicada à g ao item b).
d) Começando de $x_0 = 1$, calcule as aproximações x_1, x_2, x_3, x_4 de $\sqrt{2}$.

ANÁLISE APLICADA

Definições úteis

Def. 1 [Espaço l^∞]
l^∞ é o conjunto de todas as seqüências limitadas de números complexos, isto é, $x \in l^\infty$, e $x = (\xi_j)^\infty_{j=1}$ se existe uma número real c_x tal que $|\xi_j| \le c_x$ para todo j $\in$ N. c_x pode depender de *x,* mas não depende de *j.*

- A norma usual sobre l^∞ é dada por $\| x \| = \max_{j\in N} |\xi_j|$.

Def. 2 [Forma Hermitiana]
Seja *V* um espaço vetorial sobre um corpo K (usualmente R ou C). Uma forma *Hermitinana* sobre $V \times V$ é uma aplicação
$h : V \times V \to K$
tal que, para todo $x, y, z \in V$ e para todo $\alpha \in K$, temos as propriedades:
1. $h(x + y , z) = h(x , z) + h(y , z),$
2. $h(\alpha x , y) = \alpha h(x , y),$
3. $h(x , y) = h(y , x).$

Def. 3 [Seminorma]
Uma seminorma sobre um espaço vetorial *V* é uma aplicação $p:V \to IR$, satisfazendo as seguintes propriedades:
1. $p(x) \ge 0,$
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x),$
3. $p(x + y) \le p(x) + p(y).$

- Se, além disso, $p(x)$ satisfazer a propriedade $p(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$ então $p(x)$ é uma norma sobre V.

Exame de Qualificação - Matrizes

---

1. Quais das seguintes propriedades de matrizes quadradas se mantém na operação
a) positiva definida:
b) indefinida:
c) singular:
d) não singular:
e) ortogonal.
Justifique algebricamente e/ou com contra-exemplos,

---

2. Explique de que forma diferentes tipos de fatoração podem ser usados para obter de uma matriz.

---

3. Considere $A : m \times n$, $m \geq n$. Descreva métodos para a solução do problema de quadrados mínimos e discuta as vantagens e desvantagens de cada um deles.

---

4. Enuncie e demonstre as relações entre multiplicidade de um autovalor e dimensão, subespaço de autovetores associado.

---

5. Discuta a relação entre o número de condição e sensibilidade de sistemas lineares.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO AO DOUTORADO
ÁREA DE ANÁLISE NUMÉRICA - 22 / 09 / 2000

1ª Questão:

1. Descreva a propriedade de *minmax* satisfeita pelos polinômios de Chebyshev.
2. Mostre corno ela pode ser usada na escolha de pontos de interpolação polinomial.
3. O uso de interpolação polinomial em nós igualmente espaçados é sempre um processo convergente para a função verdadeira, à medida que aumentamos o número de nós de interpo1ação? Justifique.

2ª Questão:

Considere o seguinte problema:

$$u''(x) + f(x)u'(x) + g(x)u(x) = q(x)\,,\ \ x \in (0,1),$$
$$u(0) = 0 \qquad u'(1) = 0.$$

1. Monte um esquema de diferenças finitas para resolvê-lo de forma eficiente.
2. Mostre qual a ordem do erro do seu esquema, justificando o que fizer.
3. Se você necessitar de uma aproximação para a solução do problema acima, num ponto onde ela não foi tabelada pelo seu esquema, como você resolve esse problema? Justifique.
4. Como você faria para encontrar urna aproximação para a área sob o gráfico da solução deste problema, num sub-intervalo de [0,1]? Seja tão detalhado quanto necessário.

3ª Questão:

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Deseja-se calcular numericamente a integral definida $\int_a^b f(x)dx$. O processo utilizado deve integrar, com erro zero, polinômios de grau ≤ 5.

1. Indique duas possibilidades de método numérico para resolver este problema.
2. Descreva com detalhes aquele método que for o mais eficiente dos dois, justificando o que fizer.

4ª Questão:

1. Dê a definição de spline polinomial de grau p ($\in S_p(\Omega)$) e justifique a afirmação: "Todo polinômio de grau p é uma spline no conjunto $S_p(\Omega)$, para todo Ω partição de um intervalo $[a,b]$ de IR^n.
2. A recíproca da afirmação acima é verdadeira? justifique.
3. Descreva spline cúbica interpolante de $f(x)$ em $[a, b]$. (Definir, analisar existência e unicidade, mostrar como encontrar, etc.)
4. Dê duas condições, sob as quais exista uma única spline cúbica interpolante de f em $[a, b]$. Mostre a unicidade.