UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

1999

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE APLICADA

1. a) Seja X o espaço vetorial dos polinômios restritos ao intervalo [0,1] munido com a norma $||x|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Mostre que o operador linear de diferenciação

$$\begin{aligned} T &: X \to X \\ x(t) &\to T[x](t) = x'(t) \end{aligned}$$

não é um operador limitado.

b) Sejam $X = C[0,1]$ (munido com a norma $||x|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$) e

$$\begin{aligned} T &: X \to X \\ x(t) &\to y(t) = T[x](t) = \int_0^1 K(t, r)\, x(r)\, dr, \end{aligned}$$

onde a função $K(t, r)$, chamada de núcleo de T, é assumida ser contínua em $[0,1] \times [0,1]$. Mostre que T é um operador linear limitado.

2. a) Enuncie o Teorema de Hahn-Banach.

b) Use o Teorema de Hahn-Banach para provar o seguinte resultado:

Sejam X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento de X. Existe um funcional linear limitado $f \in X'$ tal que

$$|| f || = 1 \ , \ f(x_0) = ||x_0||.$$

3. a) Defina convergência forte e fraca de seqüências em um espaço vetorial normado X.

b) Dê um exemplo de uma seqüência que convirja fracamente, mas não fortemente.

c) Mostre que se X for de dimensão finita, então convergência fraca implica convergência forte.

4.a) Sejam X um espaço de Hilbert, $\{v_1,\ldots v_n\}$ um subconjunto ortonormal de X e V o subspaço de X gerado por estes vetores. Dado $x \in X$, descreva como encontrar $\overline{x} \in V$, a melhor aproximação de x em V. Interprete geometricamente.

b) Como ilustração, analise o caso particular da base dos polinômios trigonométricos de Fourier.

5. a) Defina o que é uma contração em um espaço métrico (X,d) e enuncie o Teorema do ponto fixo de Banach. .

b) Seja X = $[1,\infty)$, com a métrica usual da reta real, e considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ x &\to x + x^{-1}. \end{aligned}$$

Mostre que T não tem pontos fixos. :-lostre também que $|Tx - Ty| < |x - y|$ para $x \neq y$, o que ilustra a importância da condição de contração no Teorema de Ponto Fixo.