UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Secretaria de Pós-Graduação

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

1998

Exame de Qualificação em Análise Aplicada, 1998

Observação: Toda conclusão deve ser justificada com uma demonstração ou uma referência à um resultado clássico que deve ser citado pelo nome.

1. Seja H um espaço de Hilbert e $\Phi_n \in H^*$ funcionais lineares limitados tais que

i) $\Phi_n \to \Phi$ (convergência fraca);

ii) $||\Phi_n|| \to ||\Phi||$.

Mostre que então $||\Phi_n - \Phi|| \to 0$ ($||\ .\ ||$ é a norma de H^*).

2. Seja E um espaço de Banach e $f : E \to E$ uma contração.

a) Mostre que $I + f$ é um homomorfismo de E (isto é, uma função bijetora e bicontínua), onde = identidade.

b) Aplique este resultado na solução de uma equação integral não-linear.

3. O seguinte teorema vale (não precisa demonstrar!): Seja $f_n \in C_0(K, R)$, $n \in Z^+$. Suponhamos que

i) K for espaço métrico compacto,

ii) $g \in C^0(K, R)$,

iii) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $n, x \in K$.

Se $lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ para todo $x \in K$, então a convergência é uniforme. Mostre que nenhuma das hipóteses (i,ii,iii) pode ser retirada do enunciado.

4. Uma seqüência de funções $\delta_n \in C^k(R, R^+)$ $(k, n \in Z^+)$ é chamada de Dirac se

i) δ_n são integráveis com $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n \, dx = 1$, para todo n, e

ii) $lim_{n\to\infty} \int_{-t}^{t} \delta_n(x) \, dx = 1$, para todo $\varepsilon > 0$

a) Mostre que $\delta_n = c_n e^{-nx^2}$ é uma seqüência de Dirac para $k = \infty$, se c_n forem escolhidas apropriadamente.

Seja agora $f \in C_0^{\,0}(R, R^+)$ o espaço de funções contínuas com suporte compacto, e $f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \delta_n(x - \xi)\, d\xi$.

b) Mostre que $f_n \in C^k(R, R^+)$.

c) Mostre que $f_n \to f$ uniformemente.

d) Seja $\delta_n(x) = b_n(1 - x^2)^n$ para $|x| \leq 1$, e $\delta_n(x) = O$ para $|x| \geq 1$. Mostre que δ_n $(n \geq 1)$ é uma seqüência de Dirac, se b_n forem escolhidos apropriadamente.

e) Use (d) para esboçar uma demonstração do teorema de aproximação de Weierstrass.

5. Seja Ω um subconjunto fechado de R. Considere $L_2(\Omega, R)$ como o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $A_2(\Omega, R)$ (*o* espaço das funções contínuas de suporte compacto $C_0^{\,0}(\Omega, R)$, com a norma dada por $\|f\|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx$)).

Mostre que os conjuntos de funções M abaixo são subespaços densos de $L_2(\Omega, R)$:

a) $\Omega = R$, M = o espaço de funções escada de suporte compacto.

b) $\Omega = R$, $M = C_0^{\,\infty}(\Omega, R)$, o espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

c) $\Omega = [0,1]$, $M = C^\infty_{per} = \{ f \in C^\infty ;\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ para todo $k \in N\}$, o espaço de funções infinitamente diferenciáveis 1-periódicas.