EXAMES DE SELEÇÃO
MESTRADO & DOUTORADO
MATEMÁTICA APLICADA

IMECC

UNICAMP

1995 — 2002

Álgebra Linear – 1995 (1)

A1. Dê exemplos de matrizes A para as quais o número de soluções do sistema linear $Ax = b$ é :
(a) Zero ou um, dependendo de b.
(b) Infinito para qualquer b.
(c) Zero ou infinito, dependendo de b.
(d) Um para todo b.

A2. (a) Seja $0 \neq u \in I\!R^n$ e $\alpha \in I\!R_*$. Mostre que $\alpha u u^T$ é uma matriz simétrica de posto 1.

(b) Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ semi-definida positiva, isto é, $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in I\!R^n$. Suponha que $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Mostre que $a_{ij} + a_{ji} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

A3. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ uma matriz nilpotente, isto é, $A^n = 0$ para algum inteiro positivo n. Mostre que:
(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. (b) $\det(I + A) = 1$. (c) Se A é simétrica então $A = 0$.

A4. Seja $A \in I\!R^{m\times n}$, $1 \leq m \leq n$, posto$(A) = m$, $b \in I\!R^m$ e $\mathcal{L} = \{x \in I\!R^n \mid Ax = b\}$.
(a) Mostre que AA^T é não singular.
(b) Seja $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ e $y = A^+ b$. Mostre que $y \in \mathcal{L}$.
(c) Mostre que para qualquer $x \in \mathcal{L}$, $x - y$ é ortogonal a y.
(d) Interprete geometricamente no caso em que $n = 2$ e $m = 1$.

A5. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, e polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)\ , \quad (*)$$

e denotemos por $\mathrm{tr}(A)$ o traço de A, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal.
(a) Escolha λ em $(*)$ para concluir que $\det(A)$ é o produto dos autovalores.
(b) Iguale os coeficientes de $(-\lambda)^{n-1}$ em cada lado de $(*)$ para concluir que $\mathrm{tr}(A)$ é a soma dos autovalores.
(c) Para um escalar t, mostre que os autovalores de $I + tA$ são $1 + t\lambda_1, 1 + t\lambda_2, \ldots, 1 + t\lambda_n$.
(d) Use (a), (b) e (c) para mostrar que

$$\frac{d}{dt}\det(I + tA)\bigg|_{t=0} = \mathrm{tr}(A)\ .$$

Cálculo Diferencial e Integral – 1995 (1)

C1. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = 0.25x(t)(x(t) - 50) \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

<u>Sem</u> resolver a equação diferencial, comente características da solução e esboçe o seu gráfico.

C2. Mostre que $\dfrac{79}{48}$ é uma aproximação de $\sqrt{e}$ ($e = 2.71828\ldots$) com erro absoluto inferior a 0.01 (<u>Sugestão</u>: utilize a série de Taylor de e^x em torno de $x = 0$).

C3 Considere f uma função real, $\{a_n\}$ uma sequência de números reais e $\sum a_n$ a série correspondente. Para cada uma das afirmações abaixo, demonstre as verdadeiras e encontre um contra-exemplo para as falsas:
(a) Se f é diferenciável então f é contínua.
(b) Se f é contínua então f é diferenciável.
(c) Se $\{a_n\}$ converge para 0 então $\sum a_n$ converge.
(d) Se $\sum a_n^2$ converge então $\sum a_n$ converge.
(e) Se $\{a_n\}$ converge e $\{b_n\}$ é limitada então $\{a_n + b_n\}$ converge.
(f) Se $\{a_n\}$ converge para 0 e $\{b_n\}$ é limitada então $\{a_n b_n\}$ converge para 0.

C4. Seja $f : I\!R \to I\!R$, $f \in C^2$ com $f''(x) > 0$ para todo $x \in I\!R$. Seja $[a, b]$ um intervalo em $I\!R$ e seja r a reta tangente a f num ponto $x = c \in [a, b]$. Seja $A(c)$ a área da região compreendida entre a função f e a reta r no intervalo $[a, b]$, isto é,

$$A(c) = \int_a^b [f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)]\, dx\ .$$

Mostre que $c^* = \dfrac{a + b}{2}$ é um minimizador absoluto de $A(c)$, independentemente de f.

C5. (a) Seja T o triângulo limitado por (0,0), (1,8) e (4,2). Calcular a integral dupla $\displaystyle\int_T\int x^2\, dx\, dy$.
(b) Seja $L = \{(x, y) \mid y = 2x, 0 \leq x \leq 1\}$ e $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Calcular a integral de linha $\displaystyle\int_L xy\, ds$.

Álgebra Linear – 1995 (2)

A1. (a) Um conjunto não vazio $B \subset \mathbb{R}^n$ é *casualmente independente* se existe algum subconjunto de B que seja linearmente independente. Caracterize os conjuntos casualmente independentes da maneira mais sintética e econômica possível.

(b) Seja V um espaço vetorial e A um subespaço vetorial de V diferente de $\{0\}$ e V. Seja B o complemento de A. Mostre que $B \cup \{0\}$ não é um subespaço vetorial.

A2. Exiba uma matriz A e um vetor b tais que as três condições seguintes se cumpram simultaneamente:
(i) Todos os elementos de A são não nulos.
(ii) O sistema linear $Ax = b$ tem infinitas soluções.
(iii) Todas as soluções do sistema linear $Ax = b$ satisfazem $x_1 = 5$.

A3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:
(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
(b) $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.
(c) $Ax = 0$ implica $x = 0$ se e somente se A é singular.
(d) Se A e B são não singulares então AB é não singular.
(e) Se A e B são singulares então $A + B$ é singular.
(f) Se $x \neq 0$ e $x^T Ax = 0$ então A é singular.

A4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz auto-reflexiva, isto é, $A^2 = I$.
(a) Para todo inteiro positivo k calcule A^k.
(b) Mostre que os autovalores de A são -1 e 1.
(c) Verifique que para qualquer $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $(I - A)x$ e $(I + A)x$ são os autovetores correspondentes a -1 e 1, respectivamente.
(d) Mostre que $|\det(A)| = 1$ e $\det(I \pm A) = 0$ ou 2^n.

A5. Seja $A = I + \sigma xy^T$ onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$ e I é a matriz identidade de ordem n.
(a) Compute os autovalores e autovetores de A.
(b) Sob que condição A é singular?
(c) Compute $\det(A)$.

Cálculo Diferencial e Integral – 1995 (2)

C1. (a) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se para todo $x \in [0,1]$

$$\int_0^x f(t)\,dt \;=\; \int_x^1 f(t)\,dt$$

então f é identicamente zero.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2 \,.$$

Mostre que f é constante.

C2. Seja $\{x_k\}$ uma seqüência de números reais tal que $\lim_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = 0$. Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $\{x_k\}$ é limitada.
(b) $\{x_k\}$ é convergente.
(c) Se $\{x_k\}$ é limitada então $\{x_k\}$ é convergente.

C3. Seja A a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.
(a) Calcule a área de A.
(b) Expresse o perímetro de A em termos de uma integral definida.

C4. Mostre que

$$\left| \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} \right| < \frac{1}{n+1} \,,$$

onde ln denota o logaritmo natural (ou Neperiano) .

C5. (a) Seja $y \equiv y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $y(0) = 1$. Mostre que $y(5) > 0$.

(b) Considere a equação diferencial ordinária, $P' = \lambda P \ln(K/P)$, $P \equiv P(t) > 0$ e λ e K são constantes positivas. Com a ajuda da substituição $Q = \ln(K/P)$, mostre que a solução é dada por $P(t) = K(P(0)/K)^{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$. Esboçe o gráfico de $P(t)$ para $t \ge 0$.

Álgebra Linear – 1995 (3)

A1. (a) Caracterize o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n \text{ com } \{v, v_1, \ldots, v_n\} \text{ base de } \mathbb{R}^n\} \ .$$

(b) Mostre que um sistema linear $Ax = b$ não pode ter exatamente 7 soluções.

A2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e considere o conjunto $S = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AX + XA \text{ é simétrica}\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

A3. Calcule os zeros da função $f(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

A4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$. Sabe-se que A satisfaz a equação matricial $p(A) = (-1)^n A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = 0$.
(a) Qual a condição sobre os coeficientes $\{b_i\}$ para que A seja inversível?
(b) Supondo A inversível e baseado na equação $p(A) = 0$, descreva um processo para calcular A^{-1} usando apenas soma e multiplicação de matrizes.
(c) Ilustre o seu processo para a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A5. (a) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz idempotente, isto é, $A^2 = A$. Mostre que $I - A$ é singular e que $I + A$ é não singular.

(b) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz anti-simétrica, isto é, $A^T = -A$. Mostre que $I + A$ é não singular e que se n é ímpar então A é singular.

Cálculo Diferencial e Integral – 1995 (3)

C1. (a) Mostre que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

(b) Sejam a e b números reais tais que $0 < a < b$. Mostre que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b\ .$$

C2. Seja $p : I\!R \to I\!R$ um polinômio com coeficientes reais e seja r_k o número de raízes reais da equação $\dfrac{d^k}{dx^k}p(x) = 0$, para $k = 0, 1, 2$. Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $r_1 \leq r_0$.
(b) $r_1 \geq r_0$.
(c) $r_1 \geq r_0 - 1$.
(d) $r_2 \leq r_0 + 1$.

C3. (a) A soma $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$ não é conhecida. Mostre que:

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{7}{8}S \quad \text{e} \quad \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} \cdots = \frac{3}{4}S.$$

(b) Considere $f, g : I\!R \to I\!R$ funções de classe C^∞ com $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e $g^{(n)}(a) \neq 0$, onde $h^{(i)}$ denota a derivada de ordem i de h. Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

C4. Seja $f : I\!R \to I\!R$ convexa, isto é, para quaisquer $x, y \in I\!R$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$ temos que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
(a) Interprete geometricamente a desigualdade acima.
(b) Mostre que se f é diferenciável então $f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x)$.
(c) Interprete (b) geometricamente.

C5. Considere a seqüência de números reais definida por $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + \dfrac{2}{x_k}$ para $k \geq 0$ com $x_0 > 2$. Mostre que:
(a) $2 < x_{n+1} < x_n$ para todo $n \geq 0$.
(b) $\displaystyle\lim_{k \to \infty} x_k = 2$.
(c) $|x_{k+1} - 2| \leq \dfrac{1}{4}|x_k - 2|^2$.

Álgebra Linear – 1996

A1. Considere os espaços

$$\mathcal{S} = \{\ A \in I\!R^{n\times n} \mid A - A^T = 0\ \} \text{ e } \mathcal{T} = \{\ A \in I\!R^{n\times n} \mid A + A^T = 0\ \}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são subespaços vetoriais de $I\!R^{n\times n}$.

(b) Quais as dimensões de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$?

(c) Encontre uma base para $\mathcal{S}$ e uma base para $\mathcal{T}$ no caso em que $n = 2$.

(d) Mostre que toda matriz $A \in I\!R^{n\times n}$ pode ser escrita como a soma $A = S + T$ com $S \in \mathcal{S}$ e $T \in \mathcal{T}$.

A2. (a) Mostre que **não** existem matrizes A e B tais que $AB - BA = I$, onde I é a matriz identidade.

(b) Mostre que uma matriz $A \in I\!R^{m\times n}$ tem posto 1 se e somente se $A = uv^T$ com $0 \neq u \in I\!R^m$ e $0 \neq v \in I\!R^n$.

A3. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ tal que $A^2 + I = 0$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Mostre que:

(a) A é não singular.

(b) n é par.

(c) A não tem autovalores reais.

(d) $\det(A) = 1$.

(e) $I + A$ e $I - A$ são não singulares.

A4. Dados $A \in I\!R^{m\times n}$ e $b \in I\!R^m$ definimos os espaços

$$\mathcal{R}(A) = \{\ Ax \mid x \in I\!R^n\ \},$$
$$\mathcal{R}(A^T) = \{\ A^Ty \mid y \in I\!R^m\ \} \text{ e}$$
$$\mathcal{N}(A, b) = \{\ x \in I\!R^n \mid Ax = b\ \}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{R}(A^T)$ é ortogonal a $\mathcal{N}(A, 0)$.

(b) Mostre que $\mathcal{N}(A, b) \neq \emptyset$ se e somente se $b \in \mathcal{R}(A)$.

(c) Seja $u \in \mathcal{N}(A, b)$. Mostre que $x \in \mathcal{N}(A, b)$ se e somente se $x = u + v$ para algum $v \in \mathcal{N}(A, 0)$.

(d) Interprete geometricamente o ítem (c) para $m = 1$ e $n = 2$.

(e) Mostre que o número de elementos de $\mathcal{N}(A, b)$ só pode ser 0, 1 ou infinito.

A5. Sejam $a, b, c, d \in I\!R$. Mostre que existe um polinômio $p : I\!R \to I\!R$ de grau menor ou igual a dois tal que $p(-1) = a$, $p(0) = b$, $p(1) = c$ e $p(2) = d$ se e somente se $a - 3b + 3c - d = 0$.

Cálculo Diferencial e Integral – 1996

C1. Mostre que:

(a) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$. (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}=1$.

C2. (a) Seja $f(x)=\begin{cases} x^2\text{sen}\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$. Analise a continuidade e a diferenciabilidade de f em $x=0$.

(b) Seja $f:I\!R\to I\!R$ contínua tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$. O que acontece com o valor de $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ para algum a fixo e $b\to+\infty$?

C3. Seja $f(x)=x\ln x$, definida para todo $x>0$.

(a) Mostre que a aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x=0$ é dada por $t_2(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$.

(b) Encontre $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(c) Esboçe o gráfico de f.

C4. Considere a equação diferencial $y''(x)=\ln(2+y(x)^2)$, $x\in(0,1)$, sujeita as condições de contorno $y(0)=y(1)=0$. Suponha que exista uma solução ψ pelo menos duas vezes continuamente diferenciável.

(a) Mostre que ψ possui um único ponto crítico no intervalo (0,1).

(b) Classifique esse ponto crítico.

(c) Esboçe o gráfico da solução ψ.

C5. As funções definidas para $x\in I\!R^n$, $\|x\|_1=\displaystyle\sum_{i=1}^n|x_i|$, $\|x\|_2=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $\|x\|_\infty=\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n}\{|x_i|\}$, são **normas** em $I\!R^n$, ou seja, satisfazem as condições:

(i) Se $\|x\|\neq 0$ então $\|x\|>0$.

(ii) Para todo $x,y\in I\!R^n$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

(iii) Para todo $\alpha\in I\!R$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$.

(a) Mostre que $\|x\|\geq 0$ para todo $x\in I\!R^n$, onde $\|\cdot\|$ é uma função qualquer satisfazendo (i)–(iii).

(b) Faça o desenho das regiões $\mathcal{R}_p=\{\ x\in I\!R^2\mid\|x\|_p\leq 1\ \}$, para $p=1,2,\infty$.

(c) Encontre as soluções do problema de minimizar $\|x\|_p$ com $x\in I\!R^2$ restrito à reta $x_1+x_2=2$, para $p=1,2,\infty$. Exiba o valor da norma das soluções em cada caso.

Álgebra Linear – 1997

A1. (a) Encontre uma transformação linear $\mathcal{T} : I\!\!R^2 \to I\!\!R^2$ tal que Núcleo$(\mathcal{T})$ = Imagem$(\mathcal{T})$.

(b) Seja $\mathcal{T} : I\!\!R^{2\times 3} \to I\!\!R^{2\times 3}$ definida por $\mathcal{T}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$. Encontre o Núcleo e a Imagem de $\mathcal{T}$.

A2. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial de dimensão 50 e sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ subespaços vetoriais de $\mathbf{V}$ com dimensões 15 e 25, respectivamente. Mostre que:
(a) Dimensão$(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \geq 25$.
(b) $10 \leq$ Dimensão$(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \leq 15$.

A3. (a) Para que valores de $a \in I\!\!R$ o conjunto $\{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ é uma base de $I\!\!R^3$?

(b) Seja $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p\}$ uma base de um espaço vetorial. Mostre que o conjunto $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_p\}$ também é uma base desse mesmo espaço.

A4. Seja $A \in I\!\!R^{n\times n}$ e considere as seguintes definições:
(i) A é <u>anti-simétrica</u> se $A^T = -A$.
(ii) A é <u>auto-reflexiva</u> se $A^2 = I$.
(iii) A é <u>idempotente</u> se $A^2 = A$.
(iv) A é <u>nilpotente</u> se $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k.
Para cada uma das definições acima encontre os possíveis valores para:
(a) O determinante de A.
(b) Os autovalores de A.

A5. Seja $0 \neq a \in I\!\!R^2$ e considere o operador $P : I\!\!R^2 \to I\!\!R^2$ definido por
$P(x) = x - \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $I\!\!R^2$.
(a) P é um operador linear? Justifique!
(b) Mostre que $\langle a, P(x)\rangle = 0$ para todo $x \in I\!\!R^2$.
(c) Encontre <u>todas</u> as soluções de $P(x) = 0$.
(d) Interprete P geometricamente.

Cálculo Diferencial e Integral – 1997

C1. Mostre que:

(a) Para todo natural n, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(b) $\lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} \right] = \ln 2$.

Sugestão: Lembre-se que $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x$.

C2. Seja $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^4 - t^2 + 1}$.
(a) Esboçe o gráfico de f, identificando seus pontos críticos.
(b) Mostre que para todo $a \in I\!R$, a equação $f(x) = a$ tem no máximo uma solução real.

C3. Uma seqüência de números reais (a_n) é chamada de *Cauchy* se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in I\!N$ tal que se $m, n \geq M$ então $|a_m - a_n| < \epsilon$.
(a) Mostre um exemplo de uma seqüência de Cauchy.
(b) Mostre um exemplo de uma seqüência que não é de Cauchy.
(c) Prove que toda seqüência convergente é de Cauchy.
(d) Prove que toda seqüência de Cauchy é limitada.

C4. Para cada $x \in [0,1]$ definimos $f(x) = \begin{cases} x & , \ x \text{ é racional} \\ 1-x & , \ x \text{ é irracional} \end{cases}$.
Mostre que:
(a) f é contínua somente no ponto $x = 1/2$.
(b) f assume todos os valores compreendidos entre 0 e 1.

C5. Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xe^{-xy^2}$, definida para $x > 0$, com a condição $y(1) = 0$. Suponha que exista uma solução φ pelo menos duas vezes continuamente diferenciável. Mostre que:
(a) Para $x \approx 1$ temos que $\varphi(x) \approx \frac{x^2-1}{2}$.
Sugestão: Utilize a série de Taylor.
(b) $x = 1$ é o único zero de φ no semi-eixo positivo.

Álgebra Linear – 1998 (1)

A1. (a) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quais das opções abaixo são válidas para descrever o conjunto formado pelas soluções de $Ax = 0$? Justifique cada opção assinalada.

(a) Um ponto.	(b) Uma reta.	(c) Um plano.
(d) Um subespaço de $I\!R^3$.	(e) O espaço nulo de A.	(f) O espaço coluna de A.

A2. Encontre **todas** as matrizes $A \in I\!R^{3\times 3}$ tais que as condições abaixo se cumpram simultaneamente:
(i) A é simétrica e singular;
(ii) $a(1,1) + a(3,3) = 2a(1,3)$;
(iii) $(0,1,0)$ é um autovetor associado ao autovalor 1.

A3. Considere um conjunto de quatro vetores em $I\!R^3$. Para cada uma das afirmações abaixo, sublinhe qual a opção correta e justifique a sua escolha através de um exemplo:
(a) Esses vetores *são / não são / podem ser* linearmente independentes.
(b) Esses vetores *geram / não geram / podem gerar* $I\!R^3$.
(c) Se esses vetores formam as colunas de uma matriz A então o sistema linear $Ax = b$, $b \in I\!R^3$, *tem / não tem / pode não ter* solução.

A4. Para cada uma das afirmações abaixo, provar as verdadeiras e dar um contra-exemplo para as falsas:
(a) Se A é uma matriz inversível tal que $A^2 = A$ então $A^{-1} = A = I$.
(b) Se A é uma matriz e x e y são vetores tais que $Ax = Ay$ então $x = y$.
(c) Se A e B são matrizes simétricas então AB é simétrica.
(d) Se A e B são matrizes inversíveis então AB é inversível.
(e) Se r vetores geram um subespaço então a dimensão desse subespaço é r.
(f) A intersecção de dois subespaços de um mesmo espaço vetoral não pode ser vazia.

A5. Sejam U e V espaços vetoriais, $\mathcal{T} : U \to V$ uma *transformação linear* e considere o subconjunto de U, $N = \{x \in U \mid \mathcal{T}(x) = 0\}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é *injetora* se para quaisquer $x, y \in U$ temos que $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ implica em $x = y$. Mostre que:
(a) N é um subespaço vetorial de U.
(b) $\mathcal{T}$ é injetora se e somente se $N = \{0\}$.

Cálculo Diferencial e Integral – 1998 (1)

C1. Mostre que:

(a) $\lim_{n\to 0}\left(\frac{1+a^n}{2}\right)^{1/n} = \sqrt{a}, \quad \forall a > 0.$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(2n-1), \quad \forall n \in I\!N.$

Observação: $I\!N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

C2. Seja (a_n) uma seqüência em $I\!R$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n(2 - a_n/2)$, $\forall n \in I\!N$.
(a) Mostre que $1 \leq a_n \leq 2$, $\forall n \in I\!N$.
(b) Mostre que $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in I\!N$.
(c) Usando (a) e (b) mostre que (a_n) converge para 2.

C3. Uma função $f : I\!R \to I\!R$ é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I\!R$ e é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I\!R$. Seja $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ e $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Mostre que:
(a) Se f é par então f' é ímpar.
(b) Se f é ímpar então F é par.

C4. Seja $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \int_0^{g(x)} h(t)\,dt$, onde $h : I\!R \to I\!R$ é uma função diferenciável estritamente positiva e $g(x) = 3x - x^3$. Encontre todos os zeros e pontos críticos da função f, classificando-os.

C5. A equação do movimento de um pêndulo simples é dada pela solução do problema de valor inicial

$$\theta''(t) + 2\sin\theta(t) = 0, \quad \theta(0) = \pi/2, \quad \theta'(0) = 0,$$

onde θ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical e $t \geq 0$ é a variável temporal. Utilizando a aproximação de Taylor, mostre que para t suficientemente pequeno,

$$\theta(t) \approx \frac{\pi}{2} - t^2 - \frac{t^5}{15}\,.$$

Álgebra Linear – 1998 (2)

A1. Prove que a intersecção de dois planos em $\mathbb{R}^3$ não pode estar formada por um único ponto. Que acontece em $\mathbb{R}^4$? Comente todas as formas em que dois planos em $\mathbb{R}^4$ podem se intersecar.

A2. Considere o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Nesse espaço, considere o subconjunto formado pelas funções afins, isto é, pelas funções cujo gráfico é uma reta. Prove que esse conjunto é um subespaço, determine sua dimensão, exiba uma base e justifique tudo rigorosamente.

A3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular. Suponha que $A = LU$, onde L e U são também matrizes quadradas de dimensão n, L é triangular inferior com a diagonal formada por 1's e U é triangular superior. Qual o determinante de U? Prove sua resposta por indução sobre n. Qual o determinante de A? Justifique rigorosamente.

A4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva ($x^T Ax > 0 \forall x \neq 0$). Sejam $s, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $s^T y > 0$. Defina

$$B = A + \frac{ss^T}{s^T y} - \frac{Ayy^T A}{y^T As} .$$

Prove que B é definida positiva. (Notação: os vetores são colunas e ^{T} significa "transposto".)

A5. Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem a propriedade de que o comprimento (euclidiano) de Qx é igual ao comprimento de x, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sejam u e v dois vetores de $\mathbb{R}^n$. Qual é a relação do ângulo que formam Qu e Qv com o ângulo que formam u e v? Justifique rigorosamente.

Cálculo Diferencial e Integral – 1998 (2)

C1. A função $f : I\!\!R \to I\!\!R$ tem derivada contínua nula para todo $x \in I\!\!R$. Prove que f é constante.

C2. A função $f : I\!\!R \to I\!\!R$ é contínua para todo $x \in I\!\!R$ e satisfaz $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I\!\!R$. Sabe-se que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$. O que você pode afirmar sobre os valores de $f(x)$ para $x \in I\!\!R$? Prove sua afirmação.

C3. Usando o Teorema de Green, $\int_C Pdx + Qdy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, descreva uma maneira de calcular aproximadamente a área de uma figura plana delimitada por uma curva fechada C.

C4. Quantas soluções tem a equação $2^x + 2^{-x} = 3$? Justifique rigorosamente sua resposta.

C5. Uma corda vibra de acordo com a equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ para $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$. Sua posição $u(x, t)$ em cada instante do tempo t vem dada por $u(x, t) = f(t - x)$, onde $f : I\!\!R \to I\!\!R$. Para $t \geq 10$ o extremo esquerdo da corda ($x = 0$) está fixo. A partir de que instante a corda inteira está em repouso? Justifique.

Álgebra Linear – 1999

A1. Seja $\Gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base para um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$.
(a) Mostre que $\beta = \{v_1, v_1 + v_2, -v_+ v_2 + v_3\}$ é também uma base para E.
(b) Se o elemento $v \in E$ tem coordenadas $[v]_\Gamma = (2, -1, 1)$ em relação à base Γ, quais são as suas coordenadas em relação à base β ?

A2. Considere os seguintes subconjuntos do espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$, $(M_n(I\!R), +, \cdot)$:

$$S = \{A \in M_n(I\!R) \mid A^T = A\} \quad \text{e} \quad W = \{A \in M_n(I\!R) \mid A^T = -A\} \ .$$

(a) Mostre que S e W sãoo subespaços vetoriais de $(M_n(I\!R), +, \cdot)$.
(b) Encontre uma base para os subespaços S e W para o caso em que $n = 3$.
(c) Mostre que $M_n(I\!R) = S \oplus W$.

A3. Sejam $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial real e $T : E \to E$ uma transformação linear.
(a) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T, mostre que T não é injetora.
(b) A recíproca do item (a) é verdadeira ? Justifique.

A4. Considere a seguinte transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y + 2z) \ ,$$

e as seguintes bases para o espaço $I\!R^3$:

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \Gamma\{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\} \ .$$

(a) Determine $[T]_\beta^\beta$ e $[T]_\beta^\Gamma$.
(b) Determine $\mathrm{Im}(T)$ e $\dim(\mathrm{Im}(T))$.
(c) Encontre os autovalores e autovetores da transformação T.
(d) Encontre uma base α para o $I\!R^3$ de modo que $[T]_\alpha^\alpha$ seja uma matriz diagonal .

A5. Determine todos os valores dos parâmetros a e b de modo que a matriz A dada abaixo seja diagonalizável. Para esses valores de a e b, determine uma matriz inversível P e a matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Cálculo Diferencial e Integral – 1999

C1. Determine os pontos de máximo e de mínimo no intervalo $[-2, 2]$ da função $f(x) = |3x| + |2x - 1|$.

C2. Determine o polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de $x = 0$ para a função $y(x)$ dada implicitamente por

$$xy + \sin y = 0 \quad \text{com} \quad y(0) = \pi \ .$$

C3. Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
(a) Determine o raio de convergência da série.
(b) Determine o domínio da função $f(x)$ definida pela série acima.

C4. Considere que a função $T(x, y) = 9x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura em R^2. Considere o domínio de T os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(x, y) \geq 0$.
(a) Esboce o gráfico da função T.
(b) Dê a equação dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja temperatura seja sempre 5.
(c) A partir do ponto $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dê a direção e sentido para os quais a temperatura tem maior taxa de variação. Em seguida dê o valor desta taxa.
(d) Obtenha os pontos de maior e menor temperatura sobre a reta $y - x + 1 = 0$.

C5. Determine os limites abaixo justificando os argumentos utilizados:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 \, dt}{x^4}$. (b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

Álgebra Linear – 2000 (1)

A1. Escreva V (para verdadeira) o F (para falsa) relativamente às afirmações abaixo, provando o que afirmar.

(a) As soluções de um sistema linear homogêneo ($Ax = 0$) formam um subespaço vetorial.

(b) Os vetores de $\mathbb{R}^6$ que têm algum elemento nulo formam um subespaço vetorial.

(c) Qualquer conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ que verifique

$$\text{Se } v \in S \text{ então } \lambda v \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

forma um subespaço vetorial.

A2. Exiba um sistema linear de equações que tenha exatamente 5 soluções, ou prove que tal coisa é impossível.

A3. Sejam L_1 e L_2 duas retas de $\mathbb{R}^3$. Sejam $P \in L_1$, $Q \in L_2$ os pontos que realizam a distância entre L_1 e L_2. Em outras palavras, a distância entre P e Q é igual a distância entre L_1 e L_2. Qual é a relação entre o vetor $Q - P$ e os vetores geradores de L_1 e L_2? Justifique.

A4. O que significam os autovalores e os correspondentes autovetores de uma matriz real de dimensão 3×3?

Cálculo Diferencial e Integral – 2000 (1)

C1. Seja $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t \, dt$.

(a) Mostre que F é crescente no intervalo $[0, \sqrt{\pi/2}]$.

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de F no ponto de abscissa $x = \sqrt{\pi/2}$.

C2. (a) Represente a região do plano cartesiano limitada pelos gráficos de $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ e $y_3 = \dfrac{4}{x-1}$.

(b) Calcule o valor da área da região representada no ítem (a).

C3. Seja S a superfície de nível da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associada à constante $c = 10$. Sabemos que $f(1,3,5) = 10$ e $\nabla f(1,3,5) = (2,4,9)$. Escreva e *explique* a equação do plano tangente a S que passa por $(1,3,5)$.

C4. Considere a curva $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$, $t \in [0, \pi]$ e o campo vetorial $F(x,y) = (x^2, x-y)$.

(a) Represente o traço (imagem) da curva γ.

(b) Calcule $\int_\gamma F \cdot d\gamma$.

(c) Interprete fisicamente o valor obtido no item (b) supondo que F representa uma força atuando numa partícula ao longo de γ.

Álgebra Linear – 2000 (2)

A1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & b \\ x & + & ay & = & 1 \end{cases} .$$

Para cada um dos itens abaixo, pede-se a e b de modo que: (a) O sistema tenha infinitas soluções.
(b) O sistema não tenha solução.
(c) O sistema tenha apenas uma solução.

A2. O conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ se diz *qualificado* se

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0 \text{ e } \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$$

implica que

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0 .$$

Que relação existe entre conjuntos linearmente independentes e conjuntos qualificados? Se os conceitos não são equivalentes, exiba um conjunto de vetores que satisfaça uma definição e não a outra.

A3. Seja M uma matriz simétrica com todos seus autovalores diferentes e positivos. Uma idéia para obter aproximadamente um autovetor associado ao maior dos autovalores é partir de um vetor v e fazer

$$w_1 = Mv,\ w_2 = Mw_1,\ w_3 = Mw_2$$

e assim sucessivamente. Acha que isto "funciona"? Que pode acontecer com a seqüência de vetores w_k? Por que?

A4. Prove que se A é uma matriz real de n linhas e n colunas e seu determinante é diferente de zero, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} .$$

Cálculo Diferencial e Integral – 2000 (2)

C1. Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$. Calcule a área de R. Expresse o perimetro de R em termos de uma integral definida.

C2. A equação da velocidade de queda $v(t)$ de um para-quedista é dada por

$$\frac{dv}{dt} = g - K(v/v_m)^n,\ t \geq 0, v(0) = 0\ ,$$

onde $g, K, v_m > 0$ e $n > 0$ são constantes.
(a) Obtenha as soluções da equação para $n = 1$.
(b) Mostre que a função $v(t)$ é limitada superiormente no caso $n = 1$.

C3. A função positiva y é dada implicitamente pela equação

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - y\ .$$

(a) Determine, implicitamente, $\dfrac{dy}{dx}$.
(b) Determine, implicitamente, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
(c) Mostre que y tem um ponto de máximo local em $x = 0$.

C4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se diz convexa se, para todo $\lambda \in [0, 1]$, e para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)\ .$$

Sejam f e g funções convexas. Definimos, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \text{ máximo } \{f(x), g(x)\}$$

e

$$u(x) = \text{ mínimo } \{f(x), g(x)\}\ .$$

A função h é convexa? A função u é convexa? Prove ou forneça contra-exemplos.

Álgebra Linear – 2001 (1)

A1. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 - 2A + I = 0$ onde I denota a matriz identidade.
(a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa.
(b) Mostre que todos os autovalores de A são iguais a 1.
(c) Exiba um exemplo para A de ordem 2, diferente de I.

A2. Encontre a matriz A com as seguintes características:
(i) é simétrica;
(ii) o sistema linear $Ax = b$ pode ou não ter solução dependendo do vetor b;
(iii) $(1, 1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor 3;
(iv) os elementos da diagonal principal são todos iguais.

A3. Seja V um subespaço vetorial de $I\!R^n$ munido da norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
Uma transformação linear $T : V \to V$ com a propriedade $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in V$, é denominada uma *isometria* sobre V. Mostre que:
(a) $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ onde $\mathcal{N}$ denota *núcleo* ou *kernel*.
(b) Se T é uma isometria então T é sobrejetora.
(c) Se T é uma isometria então a inversa T^{-1} é uma isometria.
(d) Se T_1 e T_2 são isometrias então a composta $T_1 \circ T_2$ é uma isometria.

A4. Seja $u \in I\!R^n$ tal que $\langle u, u \rangle = 1$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $I\!R^n$. Considere os seguintes conjuntos

$$S = \{x \in I\!R^n \mid \langle u, x \rangle \leq 1\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in I\!R^n \mid 2\langle u, x \rangle \geq \sqrt{2\langle x, x \rangle}\} .$$

(a) Descreva geometricamente os conjuntos S e C.
(b) Esboçe num gráfico os conjuntos S e C para $n = 2$ e $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
(c) Encontre a área da região $S \cap C$ do item (b).

A5. Considere o seguinte conjunto: $L = \{x \in I\!R^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$. Dado $y \in I\!R^3$:
(a) Encontre a projeção ortogonal de y sobre L.
(b) Calcule a distância de y a L.
(c) Encontre o ponto simétrico a y em relação a L.

Cálculo Diferencial e Integral – 2001 (1)

C1. (a) Mostre por indução finita que para todo natural n

$$(1+1^{-1})(1+2^{-1})(1+3^{-1})\cdots(1+n^{-1}) = n+1\ .$$

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

C2. Seja $f : I\!\!R \to I\!\!R$ contínua tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = L < +\infty$.

(a) Mostre que $f(0) = 0$.

(b) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e que $f'(0) = L$.

(c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x}\, f(\mathrm{e}^{-x})$.

C3. (a) Suponha que em cada instante de tempo t a temperatura $T(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}T(t) = T(t)[K - T(t)], \quad K > 0\ .$$

Para que valores de T a temperatura: (a1) permanece inalterada? (a2) aumenta?

(b) Mostre que se $0 < |a| \leq 1$ o problema de valor inicial

$$\sqrt{f'(x)^2 + f(x)^2} = f'(x)\ f(x)\ , \quad f(0) = a\ ,$$

não admite solução.

C4. De acordo com o *Teorema de Green* a área da região $D \subset I\!\!R^2$ encerrada pela curva fechada C, orientada no sentido anti-horário, é dada por

$$A = \int\!\!\int_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_C x\ dy - y\ dx\ .$$

(a) Através da parametrização $x = a\cos\theta$ e $y = b\mathrm{sen}\theta$ encontre a área da elipse de semi-eixos a e b.

(b) Encontre a área delimitada pelo polígono de vértices em (0,0), (4,1), (5,5), (2,2) e (1,5).

C5. Considere a seqüência $f_n(x) = nx^n$, n natural, definida para $x \in [0,1]$. Calcule

$$I_1 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\, dx$$

e explique por que $I_1 \neq I_2$.

Álgebra Linear – 2001 (2)

A1. Sejam A e B duas matrizes tais que $A \cdot B = 0$ e $A + B = I$, onde 0 é a matriz nula e I é a matriz identidade. Encontre, se possível, exemplos para A e B tais que:
(a) A e B são singulares.
(b) A e B são não singulares.
(c) A é não singular e B é singular.

A2. Mostre que se os vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset I\!R^n$ são linearmente independentes então também o são os vetores $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_n + v_1\} \subset I\!R^n$.

A3. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ com todos os autovalores distintos e em módulo menores que 1. Mostre que:
(a) $I - A$ é não singular, onde I denota a matriz identidade.
(b) $I + A + A^2 + A^3 + \cdots = (I - A)^{-1}$.

A4. Dados $0 \neq x \in I\!R^n$ e $y \in I\!R^n$ definimos o indicador

$$S(x, y) = \min_{\alpha \in I\!R} \frac{\|x - \alpha\, y\|}{\|x\|} ,$$

onde $\|\cdot\|$ denota uma norma qualquer em $I\!R^n$.
(a) Mostre que $0 \leq S(x, y) \leq 1$.
(b) Quando $S(x, y)$ atinge o seu valor mínimo?
(c) Interprete $S(x, y)$ geometricamente.
(d) Mostre que no caso em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana e $y \neq 0$, $S(x, y)$ é o seno do menor ângulo formado pelos vetores x e y.

A5. Seja $T : I\!R^n \to I\!R^m$ uma transformação linear.
(a) Mostre que T é injetora se e somente se o núcleo de T contém apenas o vetor nulo.
(b) Enuncie uma condição necessária para que T seja sobrejetora.
(c) Para $n = 2$ e $m = 3$ exiba um exemplo de T injetora, provando a sua afirmação.
(d) Para $n = 3$ e $m = 2$ exiba um exemplo de T sobrejetora, provando a sua afirmação.

Cálculo Diferencial e Integral – 2001 (2)

C1. (a) Encontre <u>todas</u> as raízes da equação $x^2 - \cos x + 1 = 0$.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^n = \tan^2 x$.

C2. Seja $f : [-1,1] \to I\!R$ uma função diferenciável. Para cada uma das sentenças abaixo, diga se é falsa ou verdadeira, justificando a sua afirmação:
(a) Existe $c_0 \in [-1,1]$ tal que $f(c_0) = [f(1) + f(-1)]\ /\ 2$.
(b) Existe $c_1 \in [-1,1]$ tal que $f'(c_1) = [f(1) - f(-1)]\ /\ 2$.
(c) Existe $c_2 \in [-1,1]$ tal que $f'(c_2) = 0$.

C3. (a) Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 6$ e considere $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt[3]{f(t)}\ dt$. Mostre que para $|x|$ suficientemente pequeno $F(x) \approx x + x^2$.

(b) Determine a função $g : [0,1] \to I\!R$, contínua, tal que para todo $x \in [0,1]$,

$$\int_0^x g(t)\ dt = \int_x^1 g(t)\ dt\ .$$

C4. Considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem, $x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 2$, com condições iniciais $y(1) = y'(1) = 1$, válida para $x \in [0,1]$. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 y(x)\ dx = 1$.

C5. Considere as integrais de linha

$$I_1 = \oint_C 2x\ \mathrm{e}^y\ dx + x^2\ \mathrm{e}^y\ dy \ \text{ e } I_2 = \oint_C x\ \mathrm{e}^y\ dx + x^2\ \mathrm{e}^y\ dy\ ,$$

onde C é uma curva contínua que une os pontos (0,0) e (1,1).
(a) Qual dessas integrais pode ser calculada sem que seja dada nenhuma informação adicional sobre a curva C? Justifique.
(b) Calcule a integral indicada em (a).

Álgebra Linear – 2002 (1)

A1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i \geq j \\ 0 & , \quad i < j \end{cases}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

(a) Mostre que A é não singular.
(b) Encontre os autovalores de A.
(c) Resolva o sistema linear $Ax = b$ para $b = (1, 2, 3, \ldots, n)^T$.
(d) Mostre que se $C = AA^T$ então $c_{ij} =$ Mínimo $\{i, j\}$.

A2. Seja $d \neq 0$ um vetor em $\mathbb{R}^n$ e denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Considere os conjuntos

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle d, x \rangle = 0\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}\ .$$

(a) Mostre que H é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
(b) Mostre que C não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
(c) Faça um gráfico para $n = 2$ ilustrando os conjuntos H e C.

A3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
(a) Mostre que T é uma transformação linear.
(b) Encontre o *núcleo* e a *imagem* de T.
(c) T é injetora? Justifique.

A4. Seja A uma matriz quadrada com elementos reais e (α, u) e (β, v) dois pares de autovalor–autovetor com $\alpha \neq \beta$. Mostre que:
(a) u e v são linearmente independentes.
(b) Se A é simétrica então u e v são ortogonais.

A5. Considere a matriz $P = \dfrac{uu^T}{u^T u}$, onde $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$.
(a) Compute P^k para $k = 1, 2, 3, \ldots$
(b) P é invertível? Justifique.
(c) Mostre que o *traço* de P é igual a 1.

Cálculo Diferencial e Integral – 2002 (1)

C1. Considere os *Números de Fermat* definidos por $F_n = 2^{2^n} + 1$ para todo natural n. Prove por indução finita que para todo natural n,

$$F_0 F_1 \ldots F_{n-1} = F_n - 2 \ .$$

C2. Prove que a equação $\mathrm{e}^x + x = 1 + e^{-x}$ tem *uma e apenas uma* raiz real.

C3. (a) Seja h uma função real diferenciável tal que $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, onde h' denota a derivada de h. Encontre

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{x}\right]_{x=2} \ .$$

(b) Seja g uma função real contínua tal que para todo real x,

$$x \sin \pi x = \int_0^{x^2} g(t)\ dt \ .$$

Encontre $g(4)$.

C4. Para α real, considere a expansão em *Série de Taylor*,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\ x^k \ .$$

(a) Obtenha os coeficientes C_k.
(b) Qual o valor de C_k quando α é natural?

C5. Seja f uma função real continuamente diferenciável, satisfazendo a equação

$$xf'(x) = x^2 + f(x)^2 \ ,$$

para todo $x \in I\!R$, onde f' denota a derivada de f. Mostre que:
(a) $f(0) = 0$.
(b) $f'(0) = 0$.