Pós–Graduação em Matemática Aplicada
Exame de Qualificação – MATRIZES
29/agosto/2019

Justifique todas as respostas.
Os resultados intermediários empregados nas resoluções das questões, devem ser enunciados.

Questão 1
Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica definida positiva, pede–se:

a) considere o sistema linear $Ax = b$.

Seja $\hat{A} = [A \vdots b\,]$ a matriz aumentada, e $\hat{R} = [R \vdots d\,]$ uma forma escalonada de $\hat{A}$, obtida através de operações elementares realizadas sobre as linhas de A.
As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas? Demonstre ou Justifique teoricamente cada resposta.

a.1) $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$, existe x^*, que é solução única para os dois sistemas lineares, isto é, $Ax^* = b$ e $Rx^* = d$;

a.2) se $\hat{R}$ for construída através do processo da eliminação de Gauss, então, R é o fator de Cholesky de A.

b) demonstre o resultado:
se G é o fator de Cholesky de A então $\|A\|_2 = \|G\|_2^2$ e $\text{cond}_2(A) = (\text{cond}_2(G))^2$.

Questão 2
Considere a matriz $Q = I_n - 2uu^t$, $u : n \times 1$, $\|u\|_2 = 1$.

a) Dado um vetor $y : n \times 1$ como obter o produto $w = Qy$, sem calcular explicitamente a matriz Q? Detalhe o seu procedimento e indique o número de operações realizadas.

b) Qual a interpretação geométrica da ação da matriz Q sobre vetores do $\mathbb{R}^n$?

c) Obtenha os autovalores e autovetores de Q.

d) Demonstre que: se $\|E\|_2 < 1$ então $Q + E$ é não singular.

e) Demonstre que: $cond_\infty(Q) \leq n$.
(lembrete: $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty,\ v : n \times 1$).

Questão 3

Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$ e o vetor $b : m \times 1$.

a) Considere o problema

$$\min_{x} \|b - Ax\|_2 \tag{1}$$

a.1) Demonstre que as soluções para o problema (1) são da forma: $\hat{x} = A^{\dagger}b + z,\ z \in \mathcal{N}(A)$ onde $A^{\dagger} : n \times m$ denota a matriz pseudo–inversa de A.

a.2) Demonstre que a solução de norma–2 mínima para o problema (1) é única e pertence à $Im(A^t)$.

a.3) Refaça os itens a.1 e a.2 no caso em que $b \in \mathcal{N}(A^t)$.

b) Considere o problema

$$\min_{X:n\times m} \|I_m - AX\|_F \tag{2}$$

Demonstre que $A^{\dagger}$ é a solução de norma de Frobenius mínima para o problema (2).

Questão 4

Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com autovalores reais. Seja o seguinte procedimento para obter os autovalores de A:

`Fase I`: reduzir a matriz A através de transformações ortogonais, obtendo a matriz de Hessenberg H;

`Fase II`: aplicar o método QR sem shift sobre a matriz H.

a) Descreva como realizar a `Fase I` de modo que A e H tenham os mesmos autovalores. Justifique.

b) Qual a importância computacional de realizar a `Fase I` ao invés de aplicar diretamente o método QR sobre a matriz A?

c) Como é realizada uma iteração do método QR?
Qual a justificativa teórica deste processo para a obtenção dos autovalores da matriz A?

d) Supor que na `Fase II` seja aplicado o método QR com shifts. Refaça o item c.
