Exame de Qualificação de Mestrado
Análise no $\mathbb{R}^n$
Departamento de Matemática, UNICAMP
5 de Agosto de 2024

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:____________________________________

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

Resolva somente 4 questões.

(1) (**2,5 pontos**) Seja $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ contínua definida no aberto $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se a função $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, dada pela expressão

$$g(x) = \int_0^{f(x)} \left(t^{50} + 1\right) dt,$$

for de classe C^∞, então f também será de classe C^∞.

(2) (**2,5 pontos**)

(a) (0,2 pontos) Enuncie a **Desigualdade do Valor Médio** para aplicações $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$, em que $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e convexo.

(b) (0,3 pontos) Enuncie o **Teorema da Aplicação Inversa** para funções de classe C^1.

(c) (2,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq \kappa < 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$. Considere $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por

$$\Phi(x, y) = (x + f(y), y + f(x)).$$

Mostre que Φ é um **difeomorfismo** (global).

(3) (**2,5 pontos**) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 tal que tem-se

$$\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{para quaisquer} \quad x, v \in \mathbb{R}^m,$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante.

(a) (0.9 pontos) ponto) Mostre que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\| \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Em particular, conclua que $f : \mathbb{R}^m \to f(\mathbb{R}^m)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz.

(b) (0.8 pontos) Prove que $f : \mathbb{R}^m \to f(\mathbb{R}^m)$ é um difeomorfismo global.

(c) (0.8 pontos) Finalmente, mostre que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado e conclua que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.

(4) (**2,5 pontos**)

(a) (0,5 pontos) Enuncie o Teorema do Posto.

(b) (1,0 ponto) Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação aberta de classe C^1 e B_r o conjunto dos pontos (em U) em que o posto de f é r. Mostre que $\operatorname{int} B_r = \phi$ se r não for máximo, i.e. se $r < n$.

(c) (1,0 ponto) Sem usar a Proposição 10.3 do livro-texto [Lima, Elon L., Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$], a não ser que você a demonstre, mostre que B_n é aberto e denso em U. (Sugestão para mostrar a densidade: mostre que qualquer aberto contido em U intercepta B_n.)

(5) (**2,5 pontos**) Mostre que a 1-forma $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ é fechada mas não é exata. Dê um exemplo de uma variedade compacta M com bordo com um forma volume exata. Porém, se M for compacta e $\partial M = \phi$ então nenhuma forma volume é exata.

NOME: .... RA: ....

Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Q 5	Q 6	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas. As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

Todas as questões valem 2 pontos. Para todo inteiro $n \geq 0$, o espaço $\mathbb{R}^n$ é sempre munido da topologia euclidiana usual. Resolva apenas **5 questões**.

BOA PROVA!

1. Seja X um espaço topológico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ e o produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

2. Seja X um conjunto infinito munido da *topologia cofinita*, isto é, os abertos não-vazios de X são complementos de subconjuntos finitos. Mostre que todo subespaço de X é compacto e que todo aberto não-vazio de X é denso. Determine se X é metrizável.

3. Mostre que todo aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos e suponha que Y é Hausdorff. Mostre que f é contínua se, e somente se, o seu gráfico $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ é um subconjunto fechado do produto $X \times Y$.

5. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $X^* = X \cup \{\infty\}$ o conjunto X aumentado de um "ponto no infinito".

   (a) Mostre que $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \text{ é fechado e compacto em } X\}$ é uma topologia em X^*. O espaço topológico $(X^*, \mathcal{T}^*)$ é dito *compactificação de Alexandroff* de $(X, \mathcal{T})$.

   (b) Mostre que X^*, com a topologia acima, é sempre compacto e que X^* é Hausdorff se, e somente se, X é Hausdorff.

   (c) Demonstre que a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^3$, é homeomorfa à compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^2$.

6. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário, munido da topologia induzida de $\mathbb{R}^2$. Mostre que a aplicação

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

   é um recobrimento e induz um homeomorfismo do quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ em S^1.

NOME: .... RA: ....

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

BOA PROVA!

1. (3.0 pts) Seja T um operador linear em $I\!R^4$ cuja matriz com respeito à base canônica é

$$[T]_\xi = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Encontre a forma canônica de Jordan de T e uma base de Jordan correspondente.

   (b) Encontre uma decomposição cíclica de $I\!R^4$ com respeito a T.

   (c) Encontre a forma canônica racional de T.

2. (2.0 pts) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in L(V, V)$ um operador linear.

   (a) (0.5 pts) Enuncie o Teorema da Decomposição Primária.

   (b) (1.5 pts) Se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ com $\lambda \neq \mu$ são tais que o polinômio minimal de T é $m_T(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$, mostre que T é diagonalizável.

3. (2.0 pts) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e considere $\mu : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ a multiplicação de $\mathbb{K}$. Mostre que o par $(\mu, \mathbb{K})$ é um produto tensorial para a família $(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

4. (3.0) Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas. **Classificação sem justificativa não será considerada.**

   (a) (0.75) O posto do tensor $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \in I\!R^2 \otimes I\!R^2 \otimes I\!R^2$ é igual a 2.

   (b) (0.75) Sejam $V_1, V_2, \ldots, V_k$ e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dada φ função ℓ-linear de $V_1 \times \cdots \times V_k$ para W, seja $\tilde{\varphi}$ a única transformação linear de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ para W que satisfaz $\tilde{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)$ para $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, ..., $v_k \in V_k$ quaisquer. Então, $\tilde{\varphi}$ é sobrejetora se, e somente se, $\mathrm{Im}(\varphi)$ gera W.

   (c) (0.75) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, W um subespaço de V, e ϕ uma forma bilinear alternada ou simétrica em V. Se ϕ é degenerada, a restrição de ϕ a $W^\perp := \{u \in V : \phi(w, u) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ é degenerada.

   (d) (0.75) Sejam V e W dois K-espaços vetoriais. Sejam V_1 e V_2 subespaços de V e sejam W_1 e W_2 subespaços de W. Suponha que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Então

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes (W_1 \oplus W_2) = (V_1 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_2) \oplus (V_2 \otimes W_1) \oplus (V_2 \otimes W_2).$$