MM 719, Álgebra Linear
Exame de Qualificação ao Mestrado

Fevereiro de 2024

1. (3 pts) Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dado $T : V \to V$ um operador linear, mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

   i) V é T-cíclico.

   ii) Todos os subespaços T-primários de V são T-cíclicos.

2. (3 pts) Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ é

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) Encontre a forma canônica de Jordan de T e uma base de Jordan correspondente.

   b) Encontre uma decomposição cíclica de $\mathbb{R}^5$ com respeito a T.

   c) Encontre a forma canônica racional de T.

3. (3 pts) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dada $\phi \in B(V)$, diz-se que V é anisotrópico com respeito a ϕ se 0 for o único vetor isotrópico, isto é, se $\phi(v, v) = 0$ implica que $v = 0$. Suponha que ϕ é simétrica, e que $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ contém uma raiz quadrada de todos os seus elementos positivos. Mostre que V é anisotrópico com respeito a ϕ se, e somente se $\phi > 0$ ou $\phi < 0$.

4. (3.0) Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas. **Classificação sem justificativa não será considerada.**

   (a) (0.75) O subconjunto de $\mathrm{Alt}^{\ell}_{\mathbb{K}}(V, W) \subset \mathrm{Hom}^{\ell}_{\mathbb{K}}(V, W)$ de transformações ℓ-lineares alternadas de V para W é um subespaço vetorial de $\mathrm{Hom}^{\ell}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

   (b) (0.75) Sejam $V_1, V_2, \ldots, V_k$ e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dada φ função ℓ-linear de $V_1 \times \cdots \times V_k$ para W, seja $\tilde{\varphi}$ a única transformação linear de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ para W que satisfaz $\tilde{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)$ para $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, ..., $v_k \in V_k$ quaisquer. Então, $\tilde{\varphi}$ é sobrejetora se, e somente se, $\mathrm{Im}(\varphi)$ gera W.

   (c) (0.75) O posto do tensor $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ é igual a 2.

   (d) (0.75) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, W um subespaço de V, e ϕ uma forma bilinear alternada ou simétrica em V. Se ϕ é degenerada, a restrição de ϕ a $W^\perp := \{u \in V : \phi(w, u) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ é degenerada.

IMECC/Unicamp
Exame de Qualificação ao Mestrado
MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$
19 de fevereiro de 2024

RA: ____________ **Nome:** ____

Instruções:

- Esta prova tem 3h de duração.
- Cada questão vale 2 pontos. Escolha no máximo 5 questões para fazer.
- Enuncie completamente todos os teoremas que você utilizar.

****

Q1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xye^u + \sin(v-u) = 0, \\ (x+1)(y+2)(u+3)(v+4) - 24 = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $(x,y,u,v) = (0,0,0,0)$ resolve o sistema.

(b) Mostre que para (x,y) perto de $(0,0)$, podemos escrever (u,v) como função de (x,y) numa pequena vizinhança da origem do sistema xy, usando uma função $\phi(x,y) = (u,v)$.

(c) Calcule a derivada parcial $\phi_x(0,0)$.

Q2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2$.

(a) Mostre que $S = f^{-1}(\{1\})$ é uma superfície de classe C^∞.

(b) Obtenha uma parametrização para S.

Q3. (a) O que é o posto de uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$? Ainda neste contexto, o que é uma imersão? E uma submersão?

(b) Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é C^1, mostre que existe um subconjunto aberto e denso $A \subset U$ tal que f tem posto constante em cada componente conexa de A.

(c) Dê um exemplo de uma aplicação $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que não tem posto constante.

Q4. Demonstre o Teorema de Schwarz: se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em $c \in U$, então as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j \partial x_i},$$

para quaisquer $1 \le i, j \le n$. Dê um exemplo de que a igualdade anterior pode não ser verdadeira se f não for duas vezes diferenciável no ponto. Se quiser, você pode tomar $n = 2$ (tanto na demonstração quanto no contra-exemplo).

Q5. Seja $\omega = y\,dx + z\,dy$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Considere a restrição de ω para a esfera S^2, com a parametrização usual f.

(a) Calcule o pullback $f^* d\omega$.

(b) Calcule $\int_{S^2} d\omega$ diretamente, sem usar o Teorema de Stokes.

Q6. Seja X uma variedade compacta, conexa, orientável e sem bordo. Suponha que ω é uma n-forma não-degenerada em X. Mostre que ω não é exata. (Dica: faça o cálculo de $\int_X \omega$ pela definição e também usando o Teorema de Stokes).

Boa prova!