Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do IMECC/UNICAMP
MT401, Análise Aplicada,
26 Agosto 2024, UNICAMP, Campinas

Exame de Qualificação de Análise Aplicada

Regras de Redação:

- Escreva **nome completo, RA** no topo da primeira página.
- Inicie **cada questão em uma nova página**, indicando claramente sua numeração. Numerar cada página, no formato **{página atual}/{total de páginas}**.
- As respostas deverão ser completas, **apresentando o processo** que leva à resposta final. Redação contendo apenas uma resposta final será considerada nula.

(1) Seja $\{x_n\}$ uma sequencia no espaço métrico (X, d)

a) Se $\{x_n\}$ for de Cauchy ela converge?

b) Se $\{x_n\}$ for convergente ela é de Cauchy?

c) Descreva pelo menos uma vantagem no resolver problemas matemáticos usando sequencias de Cauchy em vez de usar sequencias não de Cauchy.

Pode utilizar na suas respostas/demonstrações exemplos ou contraexemplos.

(2) Sejam $p \in (1, \infty)$ e

$$L^p[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty, (*) \right\}$$

$(*)$ onde $f \in L^p[a,b]$ é definida unicamente a menos que num conjunto de medida nula.

a) Sabendo que vale a desigualdade de Hölder: para cada $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

prove que $d_p(f,g) = \left(\int_a^b |(f-g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é uma métrica de $L^p[a,b]$.

b) O espaço $(L^p[a,b], d_p)$ é completo? Motive a sua resposta.

c) $(C[a,b], d_p)$ é um espaço métrico completo? Motive a sua resposta.

(3) Dado um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$

a) Defina o espaço dual de $(X, \|\cdot\|)$ e prove que este espaço dual é um espaço de Banach.

b) Dar um exemplo de espaço normado e do associado espaço dual.

(4) a) Provar o Teorema de Riesz no espaço de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:
Cada funcional linear limitado $f : H \to \mathbb{C}$ tem um único (representante) $z \in H$ que satisfaz

- $f(x) = \langle x, z\rangle, \; \forall x \in H$
- $\|f\|_{H'} = \|z\|_H$

b) Dar um exemplo de aplicação deste Teorema para resolver um problema matemático.

Qualificação – Conjuntos e Lógica Fuzzy: Teoria e Aplicações – 30/08/2024

Nome: RA:

Justifique as suas respostas através de demostrações ou contra-exemplos! Boa prova!

1. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

   (a) Se $\mathbb{L}$ é uma cadeia, também chamado de conjunto totalmente ordenado, então $\mathbb{L}$ é um reticulado.

   (b) Se $\mathbb{L}$ é uma cadeia, então $\mathbb{L}$ é um reticulado completo.

   (c) Se $\mathbb{L}$ é uma cadeia, então $\mathbb{L}$ é um reticulado distributivo.

2. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ a classe do conjuntos fuzzy no universo $\mathbb{R}$. Além disso, seja $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e μ_A a sua função de pertinência. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

   (a) Se A é contínuo, então A é um número fuzzy.

   (b) Se A é contínuo e existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_A(x^*) = 1$, então A é um número fuzzy.

   (c) Se A é contínuo e convexo e, além disso, existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_A(x^*) = 1$, então A é um número fuzzy.

   (d) Se A não é contínuo, então A é não é um número fuzzy.

   (e) Se A não é contínuo e a imagem de $\mu_A = [0, 1]$, então A é não é um número fuzzy.

3. Considere $\mathbb{I}^* = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid 0 \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq 1\}$ com a ordem parcial dada por

$$[\underline{x}, \overline{x}] \leq [\underline{y}, \overline{y}] \Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y} \text{ and } \overline{x} \leq \overline{y}.$$

Sabemos que $(\mathbb{I}^*, \leq)$ é um reticulado completo.

(a) Define uma t-norma em $\mathbb{I}^*$ e verifique que se trata de fato de uma t-norma.

(b) Qual é a implicação residual da t-norma que você definiu no item b). Justifique a sua resposta.

4. (a) Seja $A \in \mathcal{F}(X)$ e $f : X \to Y$. Como se define $f(A) \in \mathcal{F}(Y)$ pelo princípio de extensão de Zadeh?

   (b) Sejam $A = (-2; 0; 2), B = (-2; 0; 1) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Determine $f(A), f(B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^2$ para todo $x \in X$.

   (c) Interprete $f(A), f(B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ gráficamente.

5. O conjutno dos números fuzzy com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar formam um espaço vetorial? Justique sua respota.

6. Seja $\{(A_i, B_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$ um conjunto de pares antecedentes-consequentes de regras fuzzy conjuntiva tais que $A_i \in \mathcal{F}([a,b])$ e $B_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dados por

$$B_i(y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se existe } z \in [a,b] \text{ tal que } y = f_i(z) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

onde $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, k$.

Assuma que para todo $x \in [a,b]$ temos que existe um índice j tal que $A_j(x) > 0$, e que $f_i(x) \neq f_j(x)$ para todo $x \in supp(A_i) \cap supp(A_j)$ para todo $i \neq j$, onde $supp(A) = \{x \mid A(x) > 0\}$, $A \in \mathcal{F}([a,b])$.

Sob essas hipóteses, o método de Mamdami e o de Takagi-Sugeno-Kang coincidem? Justifique sua resposta.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 30/08/2024

Questão 1. E sabido que em 100g de carne vermelha ha 30g de proteinas. que em 50g de feijão ha 11g de proteina e que um homem. em clima moderado. necessita de 63g de proteinas por dia. Suponha que um homem se alimenta apenas com x gramas de carne vermelha e y gramas de feijão.

(a) Qual a relação entre x e y supondo que o homem deseja obter as 63g de proteinas? Esboce o grafico.

(b) Quais deveriam ser as quantidades x e y se ele ingere y igual ao dobro de x?

(c) Qual deve ser a relação entre x e y se o homem deseja obter pelo menos 63g de proteinas? Esboce o grafico.

Questão 2. Ainda na decada de 1980 Anderson propós um modelo marcroscopico para estudar a dinâmica da população de soropositvos. o qual e dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda(t)x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t)x \\ x(0) = 1 \qquad y(0) = 0. \end{cases}$$

em que x e y são proporções $(x + y = 1)$ e $\lambda(t)$ e a taxa de transferência para individuos infectados com doença plenamente manifesta.

(a) Identifique as variaveis x e y. isto e. qual representa proporção de infectados. mas sem sintomas (assintomaticos) e qual a de sintomaticos no sistema de Anderson acima:

(b) Encontre a solução do sistema de Anderson. supondo $\lambda(t) = at$. $a > 0$:

(c) Atualmente. sabe-se que (via tratamento com medicações) e possivel individuos retornarem da condição de sintomatico para assintomatico. a uma certa taxa b. Nessas condições. sugira alterações no modelo de Anderson. mantendo o sistema linear. que contemple esse retorno. Justifique sua resposta.

(d) Supondo $\lambda(t) = a$. ou seja constante. e b tambem constante positiva. resolva o sistema sugerido no item anterior.

Questão 3. Considere o modelo logístico dado por $x_{n+1} = f(x_n)$,

onde $f(x) = rx(1-x)$, $0 < x < 1$ e $1 < r < 4$.

(a) Determine os equilíbrios desse modelo. Em seguida, estude a estabilidade do equilíbrio não trivial;

(b) Verifique a existência de ciclo estável para algum valor de r. Quanto à estabilidade, o equilíbrio não trivial mantém seu estatus como no item (a)?

(c) Escreva a equação diferencial correpondente ao modelo logístico contínuo (também conhecido como de Pearl-Verhulst), para x não negativo;

(d) Estude os equlíbrios do modelo contínuo, bem como suas estabilidades;

(e) Enumere diferenças/semelhanças qualitativas entre os medelos.

Questão 4.

(a) Defina o parâmetro epidemiológico conhecido como taxa de reprodutibilidade basal (R_0). Em seguida, obtenha tal parâmetro para o modelo epidemiológico SIR, em função dos parâmetros que regem esse modelo (SIR);

(b) Descreva como esse parâmetro pode ser utilizado para planejar estratégias de vacinação;

(c) Numa epidemia de sarampo, por exemplo, qual a porcentagem mínima da população alvo deveria ser vacinada para que a epidemia fosse controlada ou erradicada? É sabido que para o sarampo, R_0 é em torno de 13.

Questão 5.
Discorra brevemente sobre algum tópico de Biomatemática que as questões anteriores não abordaram e, se for o caso, destaque sua relevância, justificando-a.

Boa Prova!