Exame de Qualificação – Análise Aplicada

$1.^o$ semestre de 2024 – 18/03/2024

Nome:____

RA:____

$1.^a$ Questão. Considere o conjunto $P(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais com a métrica

$$d(p(t), q(t)) = \sup_i |a_i - b_i|,$$

onde $p(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i$ e $q(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i t^i$, $n, m \geq 0$.

a) Mostre que $(P(\mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico. (1.0 ponto)

b) $(P(\mathbb{R}), d)$ é completo? Justifique sua resposta. (1.5 ponto)

2.^{a} Questão.

a) Seja $(C[0,1], \|\cdot\|)$, com

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

e considere o operador linear $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ dado por

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Determine $Y = \mathrm{Im}(T)$. O operador $T^{-1} : Y \longrightarrow C[0,1]$ existe? Se sim, T^{-1} é linear? E limitado? (1 ponto)

b) Mostre que o operador $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ dado por $T((\xi_i)) = \left(\frac{\xi_i}{i}\right)$ é linear e limitado. Existe $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \longrightarrow \ell^1$. Se sim, T^{-1} é contínua? (1 ponto)

c) Seja T operador linear limitado. Então, $\mathrm{Im}(T)$ é fechado? Justifique sua resposta. (1 ponto)

3.^{a} Questão. Mostre que o espaço dual do espaço das sequências reais ℓ^2 é o próprio ℓ^2. (2.5 pontos)

4.^{a} Questão.

a) Sejam (X, d) um espaço métrico e $T : X \longrightarrow X$ tal que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ para todo $x \neq y$. Mostre que se T possui um ponto fixo, então ele é único. (1 ponto)

b) Mostre que se $T : X \longrightarrow X$ possui um único ponto fixo $x^* \in X$ e $S : X \longrightarrow X$ é um operador que comuta com T , isto é, $T \circ S = S \circ T$,então, x^* é um ponto fixo de S. (1 ponto)

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
MT402 – MATRIZES
EXAME DE QUALIFICAÇÃO MARÇO/2024

$\boxed{1}$ Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica e invertível, e considere conhecida a sua fatoração LU, $A = LU$, onde L tem diagonal unitária. Determine $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, triangular inferior com diagonal unitária e $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, diagonal, tais que $A = MDM^T$.

$\boxed{2}$ Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ vetores não nulos e $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de Householder tal que $Hx = cy$ para algum $c \in \mathbb{R}$.
(a) Determine c e H.
(b) Exemplifique com $x = [3, 4]^T$ e $y = [1, 0]^T$.

$\boxed{3}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $a_j \in \mathbb{R}^n$ a j-ésima coluna de A, $j = 1, 2, \ldots, n$. A partir da fatoração QR de A, prove a desigualdade de Hadamard,

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|a_j\|_2.$$

$\boxed{4}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ e considere o problema de quadrados mínimos lineares regularizado

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2.$$

(a) Mostre que existe solução e é única.
(b) Descreva como resolver esse problema através de fatorações de matrizes.

$\boxed{5}$ Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ vetores não nulos, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz identidade e considere a matriz $A = I + uv^T$.
(a) Encontre os autovalores de A e seus respectivos autovetores associados.
(b) Encontre condições sobre u e v para que A seja:
(b.1) Ortogonalmente diagonalizável.
(b.2) Diagonalizável, mas não ortogonalmente diagonalizável.
(b.3) Não diagonalizável.
(b.4) Singular.

Exame de Qualificação – DMA/IMECC/UNICAMP
MT403 - Análise Numérica I
22 de Março de 2024

Estudante: **RA:**

- Soluções "soltas" e/ou "desconexas" não serão consideradas. A correção do Exame de Análise Numérica será realizada levando em conta tanto a corretude quanto a consistência e a organização lógica dos passos para a conclusão da resposta, que deverá ser teoricamente fundamentada. Resoluções meramente indicadas/comentadas e sem justificativas não serão consideradas.

Questão 1

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \tag{1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

com os valores $U_0 = \alpha$ e $U_{m+1} = \beta$ prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o termo independente $F \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas $U \in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3).

b) Defina os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para o método (3).

c) Sabendo que os m autovalores da matriz A em (3) são dados por

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left[\cos(p\pi h) - 1\right] \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

mostre que o método (3) é estável e convergente na norma 2, determinando sua ordem.

Questão 2

Seja $f(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua associada ao Problema de Valor Inicial (PVI) autônomo

$$u' = f(u), \qquad 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta. \tag{5}$$

Considerando que um método linear de r passos para a aproximação do PVI (5) pode ser escrito na forma seguinte (com $\alpha_r = 1$):

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}), \tag{6}$$

pede-se os seguintes itens com as devidas justificativas:

(a) Defina estabilidade zero para o método (6) e mostre que o mesmo será consistente com o PVI (5) se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j.$$

(b) Dado (6), dê exemplos de *dois* métodos explícitos e *dois* métodos implícitos para resolução do PVI (5).

(c) Em cada caso do item (b), explique qual é a condição para que um método numérico dado por (6) seja explícito ou implícito?

Questão 3

Seja o seguinte problema de valor inicial e de contorno: Dados $a > 0$ e $\kappa > 0$, encontrar $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em} \quad (0,1) \times (0,T) \tag{7}$$

satisfazendo as condições de contorno e iniciais apropriadas.

a) Utilizando uma discretização do domínio $(0,1)$ em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$, uma aproximação do tipo *Upwind para a derivada primeira* e uma aproximação *centrada de segunda ordem para a derivada segunda*, apresente o Método das Linhas (MOL) para o problema acima (sistema de EDOs contínuo no tempo).

b) Utilizando o fato de que a matriz A obtida pelo MOL da letra a) é constante e diagonalizável ($A = R\Lambda R^{-1}$), mostre que resolver o MOL, equivale a resolver m equações escalares independentes na forma

$$w_p'(t) = \lambda_p w_p(t), \quad p = 1, 2, \ldots, m.$$

c) Defina *Região de Estabilidade Absoluta* de um método linear de passos múltiplos e explique como este conceito pode ser usado para definir um critério de estabilidade para a aproximação do MOL da letra a).

Questão 4

É sabido que a aproximação de Euler explícito no tempo combinada com uma aproximação do tipo Upwind para a derivada no espaço conduz a aproximações condicionalmente estáveis para a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

a) Utilize o método de Von-Neumann para analisar a estabilidade deste esquema, determinando possíveis relações de estabilidade entre $a, \Delta t$ e Δx.

b) Utilize o conceito de equação modificada (ou equivalente) para analisar a estabilidade da versão implícita deste esquema (Euler implícito + Upwind).

Bom exame!

Qualificação MT503 - Programação Linear
$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2024

Nome: **RA:**

Vocês encontrarão duas seções de perguntas. A Seção A contém questões sobre a programação linear vista pelos aspectos teóricos do Método Simplex. A Seção B contém perguntas sobre a programação linear com uma visão de pontos interiores.

Vocês devem escolher APENAS UMA das seções para resolver, ou seja, se escolher a Seção A não precisa resolver as questões da Seção B. NÃO PODE misturar resoluções das duas seções. As perguntas da Seção B estão no verso da folha.

SEÇÃO A - Questões relacionadas ao Método Simplex

Questão 1: As perguntas abaixo se referem ao par primal-dual (min-max) **P** e **D**, respectivamente de um problema de programação linear canônico. **Para cada item escreva uma explicação para sua resposta (não serão aceitas respostas sem uma explicação)** :

[1.a] Se uma solução básica para o primal é infactível e tem o valor da função-objetivo menor que o valor ótimo de **P** então a solução dual complementar associada a **P** é básica. Verdadeiro ou Falso? Explique.

[1.b] Considere o problema de programação linear abaixo:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximize} & z = \quad x_1 & \\ \text{s.a} & 2x_1 - 1x_2 & \geq 0 \\ & 2x_1 - 3x_2 & \leq 6 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Considere a base formada por x_1 e x_4 (a folga da segunda restrição). Dê a solução básica complementar associada a esta base primal. O que vc pode dizer sobre este par primal-dual de soluções básicas ?

[1.c] Escreva o problema dual do problema primal definido no item [1.b].

[1.d] Se **P** tem soluções ótimas alternativas e w^* é qualquer solução ótima dual para **D**, então w^* é degenerado. Verdadeiro ou Falso. Explique.

[1.e] Seja z^* o valor ótimo das funções-objetivos de **P** e **D**. Suponha que $\overline{x}$ é uma solução básica infactível para **P** cuja solução dual complementar associada $\overline{w}$ seja factível. É possível que este par primal-dual $(\overline{x}, \overline{w})$ tenha como valor de suas funções-objetivos um valor igual a z^* ?

[1.f] Se **P** é ilimitado, é possível trocar o vetor b e fazê-lo ter um ótimo finito. Verdadeiro ou Falso? Explique.

(Vire)

SEÇÃO B - Questões relacionadas a Pontos Interiores

Nome: **RA:**

[1] (a) Mostre que no problema na forma padrão $\gamma \equiv c^t x - b^t y$ é dado por $\gamma = z^t x$ para um ponto primal e dual factível;

(b) Mostre que o *gap*, $\gamma^{k+1} = c^t x^{k+1} - b^t y^{k+1}$ da iteração $k+1$ do método primal dual afim escala com passo um ($\alpha_p^k = \alpha_d^k = 1$) é dado por $\gamma^{k+1} = (dx^k)^t dz^k$.

[2] Encontre o dual do problema a seguir:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^t x \\
\text{s. a} & A_1 x = b_1 \\
 & A_2 x \leq b_2 \\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$

(a) Escreva as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.

(b) Desenvolva o método de pontos interiores primal dual afim-escala para este problema determinando o Jacobiano e os resíduos.

[3] Mostre que a solução do seguinte sistema linear

$$
\begin{pmatrix} M & p \\ p^t & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix}
$$

é dada por $x = x_0 + x_1\beta$, onde $x_0 = M^{-1}r$, $x_1 = -M^{-1}p$ e $\beta = \frac{\rho - p^t x_0}{\delta + p^t x_1}$.
Onde ρ e δ são escalares e β variável de uma dimensão.

ALUNO	RA

MT571 – Aprendizado de Máquinas: Aspectos Teóricos e Práticos

Exame de Qualificação – 22/03/2024

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Considere uma rede MLP (*multilayer perceptron*) com duas camadas ocultas, $n = 4$ unidades de entrada, 2 neurônios na primeira camada oculta, 3 neurônios na segunda camada oculta, e um único neurônio de saída.

(a) Faça um desenho do grafo associado à rede MLP, em que os nós representam os neurônios e as arestas as conexões sinápticas.

(b) Escreva a expressão matemática para a função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ descrita pela rede neural, assumindo que a ela será usada para um problema de classificação binário e terá função de ativação de ReLU nas camadas ocultas. Seja o mais explícito possível!

(c) Quantos parâmetros treináveis a rede possui?

Questão 2. Sobre os procedimentos para divisão dos dados em conjuntos de treino e teste/validação:

(a) Descreva o processo de divisão por *K-fold*.

(b) Descreva o processo de divisão por *leave-one-out*.

(c) Descreva o processo de divisão por *bootstrap*.

(d) Comente sobre vantagens e desvantagens de cada uma dessas abordagens.

Questão 3. O *K-means* é o algoritmo mais popular para resolver problemas de agrupamento.

(a) Apresente, em formato de pseudo-código, os passos deste algoritmo.

(b) Descreva matematicamente a função de custo do *K-means*.

(c) Explique por que o algoritmo de otimização do *K-means* é do tipo "coordenada descendente".

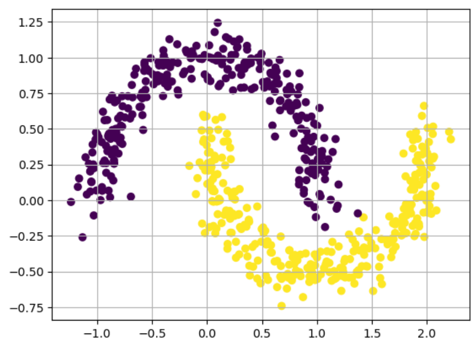
Questão 4. Responda "FALSO" ou "VERDADEIRO" e justifique sua resposta:

(a) Não é recomendado avaliar o desempenho de um modelo de aprendizado de máquina usando no conjunto de validação ou teste uma métrica diferente da função perda usada durante o treinamento.

(b) O método de máxima descida pode estagnar num mínimo local, diferente do mínimo global, durante o treinamento da regressão *ridge*, também conhecida por regressão linear com regularização de Tikhonov ou L_2.

(c) O algoritmo CART (do inglês, *Classification And Regression Tree*) sempre fornece uma árvore de decisão ótima, com a menor impureza possível nos ramos de todos os níveis da árvore.

(d) Adicionando um termo de regularização apropriado, a regressão logística pode apresentar 100% de acurácia no conjunto de dados na figura abaixo.



FOLHA ADICIONAL

Boa Prova!

EQD - Doutorado em Matemática Aplicada - 22/03/2024

MT709 - Equações diferenciais parciais aplicadas

RA: ________ **Nome:** ______________________________________

Questão	1	2	3	4	Total
Valor	1,0	3,0	3,0	3,0	10,0
Nota					

(1) Encontre a solução da equação

$$xu_x + yu_y = x$$

satisfazendo a condição

$$u(x, x^2) = \mathrm{e}^{-x}\,.$$

(2) Utilizando coordenadas polares, encontre a solução do problema

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi, \\ u(1,\theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad u(2,\theta) = 0, \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

OBS: Em coordenadas polares

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

(3) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t + 4(u-5) = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 5 + x, \\ u(0,t) = 5, \\ u(1,t) = 5. \end{cases}$$

Sugestão: use $u(x,t) = A + \mathrm{e}^{Bt}\, v(x,t)$, onde A e B são constantes.

(4) Use uma transformada integral para encontrar a solução limitada do problema

$$\begin{cases} u_x = 2u_t + u, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 6\,\mathrm{e}^{-3x}\,. \end{cases}$$