IMECC/Unicamp
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM425- Análise Funcional I
05 agosto 2024 (segunda-feira)

RA: ____________ **Nome:** ____________________________________

Serão consideradas as **quatro** melhores respostas.

Q1. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ uma sequência de escalares com a propriedade que $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ segue que $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Prove que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

Q2. Seja $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ uma função linear que *não* é limitada em um espaço de Banach $\mathcal{H}$. Mostre que

$$\phi(B_1) = \mathbb{C}$$

onde $B_1 = \{x \in \mathcal{H} : ||x|| \leq 1\}$.

Q3. Prove que o subespaço de funções contínuas

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1\right\} \subset \mathcal{C}[0,1]$$

é de primeira categoria Baire, *não* é nenhum lugar denso e *não* está aberto.

Q4. Para cada $z \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(z) > 0$, definir os elementos

$$x_z := (e^{-z}, e^{-2z}, e^{-3z}, \ldots) \in c_0.$$

Prove que $A := \{x_z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ está completo (tem span densa) em c_0.

Q5. Prove que o operador $U : L^2[0,\infty) \to \ell^2$ definido pelo

$$Uf := \left(\int_n^{n+1} f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é limitado e calcule seu adjunto $U^* : \ell^2 \to L^2[0,\infty)$.

NOME: ______________________________ RA: ____________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

BOA PROVA!

1. Mostre que a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica induzida da métrica euclidiana no ambiente é uma variedade com curvatura seccional constante igual a 1. Mostre as geodésicas de S^n são os círculos máximos.

2. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa e sejam $f_1, f_2 : M \to M$ isometrias. Suponha que existe um ponto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $(df_1)_p = (df_2)_p$ (como transformações lineares). Mostre que $f_1 = f_2$.

   Dica: mostrar que o conjunto $S = \{q \in M : f_1(q) = f_2(q) \text{ e } (df_1)_q = (df_2)_q\}$ é aberto e fechado.

3. Enuncie o Teorema de Bonnet–Myers. Dê exemplo de uma variedade riemanniana completa $M \subset \mathbb{R}^N$ não compacta e com curvatura seccional positiva. Isso contradiz o Teorema de Bonnet–Myers? Justifique sua resposta detalhadamente.

4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada, sem bordo, de dimensão n. Seja $\omega \in \Omega^n(M)$ a forma de volume definida pela métrica g. Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, mostre que

   $$\int_M \Delta(f) \cdot \omega = 0,$$

   onde $\Delta(f) := \operatorname{div}\big(\operatorname{grad}(f)\big)$. Mostre ainda que se $\Delta(f) \geq 0$, então f é constante.

5. Uma variedade Riemanniana (M, g) é uma *variedade Einstein* se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

   $$\operatorname{Ric}(X, Y) = \lambda \cdot g(X, Y)$$

   para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Mostre que λ deve ser igual à curvatura escalar de M dividida por $\dim(M)$.

6. Responda verdadeiro ou falso para as afirmações abaixo, dando uma demonstração ou um contra-exemplo para justificar cada resposta.

   I. Variedades riemannianas de curvatura escalar não-positiva podem ser compactas.

   II. Todo campo de Killing é um campo de Jacobi.

   III. Todo ponto em uma variedade riemanniana possui uma vizinhança geodesicamente convexa.

NOME: .... RA: ....

Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Q 5	Q 6	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas. As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

Todas as questões valem 2 pontos. Resolva apenas **5 questões**.

BOA PROVA!

1. Seja $X = S^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ a esfera com três pontos removidos.
   (a) Calcule o grupo fundamental $\pi_1(X)$.
   (b) Mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, existe um recobrimento $Y_n \to X$ cujo grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}_X(Y_n)$ é isomorfo ao grupo diedral $D_{2n} = \langle r, s : r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$.
2. Seja M_g a superfície de gênero g, com $g \geq 1$.
   (a) Relembre a construção de M_g como quociente de um polígono regular.
   (b) Calcule o grupo fundamental $\pi_1(M_g)$ e o primeiro grupo de homologia $H_1(M_g; \mathbb{Z})$.
   (c) Determine os valores de g tais que $\pi_1(M_g)$ é abeliano.
3. Seja $X = \mathbb{RP}^n$ o espaço projetivo real com $n \geq 2$.
   (a) Relembre a definição de X e mostre que este espaço é homeomorfo a um quociente da n-esfera S^n.
   (b) Calcule os grupos de homotopia $\pi_m(X)$ para $1 \leq m \leq n$.
4. Seja $n \geq 1$ um inteiro.
   (a) Descreva uma decomposição celular do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$.
   (b) Calcule o *anel* de cohomologia $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.
5. Seja $X = D^2 \times S^1$ o toro sólido.
   (a) Calcule os grupos de cohomologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$ do quociente $Y = X/\partial X$.
   (b) Mostre que Y não é uma variedade topológica.
6. Seja $n \geq 1$ um inteiro.
   (a) Relembre como calcular os grupos de homologia da n-esfera $H_m(S^n; \mathbb{Z})$ *usando a sequência de Mayer–Vietoris*.
   (b) Demonstre o teorema do ponto fixo de Brouwer: toda função contínua $f : D^n \to D^n$ tem um ponto fixo.

NOME: ____ RA: __________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

BOA PROVA!

1. Sejam G um grupo topológico e $H \subsetneq G$ um subgrupo. Mostre que a topologia quociente G/H é Hausdorff se e somente se H é fechado.

2. Mostre que a variedade diferenciável $\mathbb{R}^2$ admite exatamente duas estruturas não-isomorfas de grupo de Lie.

3. O objetivo desta questão é mostrar que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ são difeomorfas como variedades diferenciáveis mas não como grupos de Lie.

   (a) Mostre que a função $\varphi : S^1 \times SU(n) \to U(n)$ dada por $\varphi(e^{2\pi i\theta}, A) = e^{2\pi i\theta} \cdot A$ está bem definida e é um homomorfismo de grupos de Lie; determine o seu núcleo. Conclua que as álgebras de Lie de $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ são isomorfas.

   (b) Mostre que há elementos em $\ker \varphi$ de ordem finita. Comparando com o centro de $U(n)$, conclua que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ não são isomorfos como grupos de Lie.

   (c) Considere a função $f : U(n) \to S^1 \times SU(n)$ definida como

   $$f(A) = (\det(A), \mathrm{diag}(\det(A) - 1, 1, 1, 1..., 1) \cdot A).$$

   Mostre que f está bem definida e é diferenciável e invertível. Conclua que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ são difeomorfas como variedades diferenciáveis.

4. Seja G o grupo de Heisenberg, isto é, o grupo de Lie das matrizes da forma $(x, y, z \in \mathbb{R})$

   $$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determine o centro de G.

   (b) Descreva os subgrupos de Lie conexos de G, e mostre que são todos fechados.

   (c) Descreva as órbitas das representações adjunta e co-adjunta de G.

5. Mostre que a álgebra de Lie de $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) := \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, onde $\mathbb{C}^*$ designa o subgrupo das matrizes escalares não nulas) é isomorfa a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}^*)$.

6. Seja G um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e compacto, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que o grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ é compacto.

NOME: .... RA: ....

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

BOA PROVA!

1. Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas. **Classificação sem justificativa não será considerada.**

   (a) (1 pt.) Considerando o subanel $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid n$ é um inteiro ímpar$\}$ de $\mathbb{Q}$, temos que $\mathbb{Q}$ é um R-módulo finitamente gerado.

   (b) (1 pt.) Se $A \subseteq B$ é uma extensão de anéis (não necessariamente inteira), e Q, Q' são ideais primos de B satisfazendo $Q \subseteq Q'$ e $Q \cap A = Q' \cap A$, então $Q = Q'$.

   (c) (1 pt.) Seja $A \subseteq B$ uma extensão inteira. O radical de Jacobson de A é a contração do radical de Jacobson de B, pela aplicação inclusão.

   (d) (1 pt.) A dimensão de Krull dos anéis $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$ e $\mathbb{Z}[i]$ são iguais.

2. Sejam A uma anel, M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal de A.

   (a) (0,75 pt.) Mostre que $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{IM}$.

   (b) (0,5 pt.) Suponha que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local. Enuncie o lema de Nakayama para A e M.

   (c) (0,75 pt.) Novamente, supondo que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local. Chame $K = \frac{A}{\mathfrak{m}}$ o corpo de resíduos de A, Mostre que:
   $$M \otimes_A K \simeq K^n,$$
   como K-espaço vetorial, onde
   $$n = \mu(M) = \min\{s \in \mathbb{N} \mid M \text{ pode ser gerado por } s \text{ elementos}\}.$$

3. Responda:

   (a) (1,0 pt) Enuncie PRECISAMENTE os chamados “Teorema do going-up” e “Teorema do going-down”.

   (b) (1,0 pt) Sejam $A \subseteq B$ domínios de integridade, com A sendo normal e B inteiro sobre A. Considere P um ideal primo de B. Mostre que P é ideal primo minimal de B se, e somente se, $A \cap P$ é ideal primo minimal de A.

4. (2 pt.) Forneça explicitamente cinco ideais primos distintos do anel $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^2+2y)}$. Justifique sua resposta.

NOME: .... RA: ....

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

BOA PROVA!

1. Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas. **Classificação sem justificativa não será considerada.**
   (a) (1 pt.) Subanel de anel semisimples é semisimples.
   (b) (1 pt.) O produto tensorial de duas álgebras simples é sempre simples.
   (c) (1 pt.) Se G é um grupo finito e K um corpo qualquer, então a álgebra de grupo KG é semisimples.
   (d) (1 pt.) O grupo de Brauer de um corpo finito F possui mais que um elemento.

2. Responda:
   (a) (0,5 pt) Defina o que é anel primitivo.
   (b) (0,5 pt) Enuncie o teorema sobre a densidade de Jacobson.
   (c) (1,0 pt) Seja A um anel primitivo. Mostre que existe um anel de divisão D tal que:
      (i) $A \simeq M_n(D)$, $n \geq 1$; ou
      (ii) para todo $m \geq 1$, existe $A^{(m)}$ subanel de A de modo que existe um epimorfismo $\varphi\colon A^{(m)} \to M_n(D)$.

3. Seja
$$D_{2n} = \langle x, a \mid a^n = x^2 = e, xax = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, x, ax, a^2x, \ldots, a^{n-1}x\}$$
   o Grupo Diedral de ordem $2n$. Além disso, denote por F um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2. Mostre que:
   (a) (0,75 pt.) Se G é um grupo de ordem 4, então as álgebras de grupos FG e FD_4 são isomorfas.
   (b) (1,25 pt.) Dê exemplo de um grupo de ordem 8 não abeliano que não é isomorfo a D_8, mas $FG \simeq FD_8$.

4. Mostre que: se A é uma álgebra central simples sobre um corpo F de modo que $\dim_F A < \infty$, então dado um automorfismo φ de A, sobre F, existe um elemento invertível x em A tal que $\varphi(a) = x^{-1}ax$, para todo $a \in A$. **(Dica: essa é a versão mais fraca do famoso Teorema de Skolem e Noether.)**