UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Exame - Análise Aplicada – 09/03/2020

ALUNO	RA

Exame - Análise Aplicada – 09/03/2020

Questão 1. Um espaço de Banach que possiu uma base de Schauder é separável? Prove ou dê um contra-exemplo.

Questão 2. Considere o espaço normado $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

(a) Esse espaço é completo?

(b) Esse espaço é separável?

(c) Esse espaço possui base de Schauder? Se sim, exiba uma base.

Questão 3. Considere o espaço de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e

$$Y = \{f \in C^1[0,1] \mid f(0) = f(1)\}.$$

(a) Y é um subespaço?

(b) Y é fechado?

Questão 4. Considere o espaço de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Exiba um operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ tal que T não é uma contração mas $T^n = T \circ T^{n-1}$ é uma contração para algum $n > 1$. Esse operador possui algum ponto fixo?

Boa Prova!

Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Exame de Qualificação – MATRIZES

11/março/2020

Justifique todas as respostas.
Os resultados intermediários empregados nas resoluções das questões, devem ser enunciados.

Questão 1:

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, $PA = LU$. Supondo que esta fatoração já foi realizada e usando estes fatores:

a) discuta a existência e explicite como obter a matriz inversa de A, justificando seus argumentos;

b) explique como computar $|det(A)|$.

Questão 2

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m > n$ e posto$(A) = n$, denote por Im(A) o espaço coluna de A e seja a matriz $B = A^t A$.

a) Mostre que a matriz B é simétrica definida positiva.

b) Demonstre se for Verdadeiro, Justifique se for Falso:
o sistema linear $By = d$ admite solução única, para qualquer vetor $d \in \mathbb{R}^n$.

c) Seja a fatoração QR de A, onde $Q : m \times m$ é ortogonal, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}$, com $\hat{R}$ triangular superior com diagonal positiva. Qual a relação entre o fator de Cholesky de B e a matriz $\hat{R}$? Justifique.

d) Obtenha a expressão da matriz P, matriz de projeção ortogonal em Im(A), justificando todas as etapas.

e) Qual a relação entre os autovalores de B e os valores singulares da matriz A? Demonstre a relação enunciada.

Questão 3:

Escolha e resolva **um** dos seguintes itens:

a) Sejam os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ e a matriz $A = uv^t$.
Demonstre: $\|A\|_2 = \|A\|_F = \|u\|_2\|v\|_2$.

b) Demonstre que: se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ então $\|A\|_2 = \sigma_1$ onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$ são os valores singulares de A.

Questão 4:

Considere: a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, posto de A igual a $r < n$, e uma decomposição SVD de A: $A = UDV^t$. As matrizes U, D e V estão particionadas na forma

$$U = [U_1\ U_2],\ D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } V = [V_1\ V_2]$$

de modo que $A = U_1D_1V_1^t$ é a forma reduzida da SVD de A.

a) Qual a dimensão de cada submatriz U_1, U_2, V_1, V_2 e D_1? Justifique.

b) Para $b \in \mathbb{R}^m$, considere o problema $(\mathsf{P}) : \min \|b - Ax\|_2$.

b.1) Demonstre que as soluções para o problema (P) são da forma:

$$y = V_1(D_1)^{-1}U_1^t b + V_2 z \ \ \forall z \in \mathbb{R}^w,$$

em que a dimensão w foi estabelecida no item *a)*.

b.2) A partir da solução geral y, obtenha a solução de norma–2 mínima, denotada por $\hat{x}$, para o problema (P). Justifique.

Questão 5:

Descreva o método das Potências Inverso com *shift* de Rayleigh aplicado a uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica: inicie com a descrição do método das Potências Inverso sem shift; descreva a motivação do método pedido; compare com outras formas do método das potências; descreva a complexidade da implementação do método pedido.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS **Nota:**

IMECC **Disciplina: MT503 : Programação Linear**
Professor: Antonio Carlos Moretti

Aluno: ______________________ **RA:** ______________

Qualificação em Programação Linear

Duração: 240 Minutos Data: 22/10/2019

Esta prova contém 3 página(s) e 4 questões, formando um um total de 89 pontos.

Tabela (para uso EXCLUSIVO do professor)

Questão:	1	2	3	4	Total
Valor:	23	22	22	22	89
Pontuação:					

1. (23 pontos) Considere o seguinte PPL

$$\begin{array}{llrl} \text{MAX} & z = & -1x_1 + 2x_2 + 1x3 & \\ \text{sujeito a} & & 3x_1 + 1x_2 - 4x_3 & \leq 4 \\ & & 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 & \leq 10 \\ & & 1x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \leq 9 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Pede-se:

(2a) Use o Método Simplex para mostrar que o problema acima NÃO tem solução finita. Explique sua resposta ;

(2b) Dê a direção extrema obtida pelo Método Simplex;

(2c) Escreva a base dada pelo ponto extremo achado pelo Método Simplex que é o ponto inicial da direção extrema que leva o problema a ser ilimitado dada a função-objetivo original;

(2d) Dê a inversa da base obtida no item anterior;

(2e) Dê uma solução com $z > 1000$;

(2f) Escreva o dual do problema dado originalmente;

(2g) Qual é o tipo da solução dual ? Explique.

2. (22 pontos) Mostre sem usar o Método Simplex que a solução $x^t = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 2, 0)^t$ é uma solução ótima do problema acima;

$$\begin{array}{llrl} \text{MAX} & z = & 9x_1 + 14x_2 + 7x_3 & \\ \text{sujeito a} & & 2x_1 + 1x_2 + 3x_2 & \leq 6 \\ & & 5x_1 + 4x_2 + 1x_3 & = 8 \\ & & 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 & \geq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Pede-se:

(2a) Dê o dual do problema acima;

(2b) Dê a solução dual ótima através das folgas complementares;

(2c) Coloque o problema no formato canônico da MINIMIZAÇÃO;

3. (22 pontos) Pede-se:

(3a) Escreva um modelo matemático que maximiza a receita (considere o preço de venda e os custos de produção e de aquisição de insumos). Os porcentuais abaixo indicam a mistura de insumos para produção de cada produto. Caso decida-se pela compra de um insumo em um determinado fornecedor, deve-se obedecer à sua quantidade mínima estabelecida.

	Produtos				
Preço unitário de Venda	A	B	C	D	E
Insumo 1	R$ 100,00	R$ 105,00	R$ 98,00	R$ 143,00	R$ 157,00
Insumo 2	80%	45%	50%	16%	28%
Insumo 3	10%	22%	20%	53%	34%
Capacidade de Produção	101	94	107	58	40
Custo Unitário de Produção	R$ 10,00	R$ 11,00	R$ 9,00	R$ 17,00	R$ 19,00

	Fornecedores			
Custo de Aquisição	1	2	3	4
Insumo 1	R$ 22,00	R$ 27,00	R$ 25,00	R$ 23,00
Insumo 2	R$ 34,00	R$ 31,50	R$ 33,00	R$ 35,00
Insumo 3	R$ 25,00	R$ 26,00	R$ 27,00	R$ 23,00

As quantidades mínimas a serem compradas, caso decida-se por um fornecedor específico, são tabelas pela tabela abaixo

	Fornecedores			
Insumos	1	2	3	4
1	90	-	-	87
2	-	65	-	-
3	-	-	-	30

Por outro lado, a quantidade máxima a serem compradas , caso decida-se por um fornecedor específico, são dadas pela tabela abaixo

	Fornecedores			
Insumos	1	2	3	4
1	120	-	-	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	45

(3b) Modifique a função-objetivo para contabilizar, além dos daos já definidos no Problema 1, os custos fixos indicados na tabela abaixo. Os custos fixos só devem ser considerados se uma quantidade não nula do produto for gerada.

	Produtos				
	A	B	C	D	E
Custo Fixo	R$ 30,00	R$ 30,00	R$ 27,00	R$ 30,00	R$ 36,00

(3c) Por questões de qualidade da mistura, pelo menos uma das seguintes restrições deve valer:

(1) da quantidade total de insumo 1 utilizado no produto E, limitar em 30% a participação daquele que vem do fornecedor 2
OU
(2) da quantidade total de insumo 3 utilizado no produto E, limitar em 40% a participação daquele com origem no fornecedor 4.

(3d) Por questões de qualidade da mistura, ao se utilizar qualquer insumo do Fornecedor 1, deve-se utilizar os insumos 2 e 3 do fornecedor 3.

4. (22 pontos) Uma companhia fabrica dois tipos de misturas para bolos, A e B, usando dois tipos de matéria-prima, R_1 e R_2. A tabela abaixo mostra quantas unidades de matéria-prima são necessárias para produzir 1 unidade de A e B:

Matéria-Prima	A	B	Unidades Disponíveis
R_1	1	2	6000
R_2	2	1	8000
Lucro Unitário	7	5	
Demanda Máxima	3500	2500	

Pede-se:

(4a) Formule, como um PPL, o problema de determinar quantas unidades de A e B produzir.

(4b) Resolva geometricamente.

(4c) Determine os valores marginais associados a todas as restrições. Interprete-os

(4d) Qual seria o lucro extra para a companhia se a disponibilidade de R1 e R2 fossem aumentadas por uma unidade? Faça a análise separadamente para R1 e R2.

(4e) Uma nova mistura desenvolvida pela companhia necessita, por unidade, de 2 unidades de R1 e 2 unidades de R2. Qual deveria ser o lucro unitário desta mistura para que ela fosse competitiva com A e B?

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – CONJUNTOS E LÓGICA FUZZY – 13/03/2020

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Definição 1 (Princípio de Extensão de Zadeh)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma função clássica. A extensão de Zadeh de f é a função $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ que fornece, para qualquer $A \in \mathcal{F}(X)$, o conjunto fuzzy $f(A) \in \mathcal{F}(Y)$ cuja função de pertinência é*

$$f(A)(y) = \sup_{x : f(x) = y} A(x), \quad \forall y \in Y.$$

Definição 2 (Número Fuzzy Triangular)**.** *Um número fuzzy triangular $A = (a; b; c)$ é caracterizado pela função de pertinência*

$$A(x) = \max\left\{\min\left\{\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right\}, 0\right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Boa Prova!

Questão 1. Considere a base de regras *fuzzy*

$$\begin{cases} \textbf{SE } x \textbf{ é } A_1 \textbf{ E } y \textbf{ é } A_2, \textbf{ ENTÃO } z \textbf{ é } B_1, \\ \textbf{SE } x \textbf{ é } A_2 \textbf{ E } y \textbf{ é } A_1, \textbf{ ENTÃO } z \textbf{ é } B_2, \end{cases} \tag{1}$$

em que A_1, A_2, B_1 e B_2 são os números *fuzzy* triangulares

$$A_1 = (0; 2; 5), \quad A_2 = (0; 5; 6), \quad B_1 = (0; 1; 2) \quad \text{e} \quad B_2 = (1; 2; 3). \tag{2}$$

Descreva o método de inferência de Mamdani e esboce o conjunto fuzzy deduzido pela base de regras considerando $x = 1$ e $y = 4$.

Questão 2. Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = e^{-(x-y)^2}, \tag{3}$$

que descreve o conceito "x está próximo de y". Determine a expressão para a relação $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada pela composições sup-$\triangle_P$, ou seja, $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ com a t-norma do produto. A relação $\mathcal{S}$ também descreve o conceito "x está próximo de y"? Justifique sua resposta.

Questão 3.

(a) Qual é a definição de um *número fuzzy*?

(b) Apresente um exemplo de um número fuzzy cuja função de pertinência não é contínua e assume um número infinito de valores.

(c) Sejam A, B números fuzzy e $[A]^\alpha, [B]^\alpha$ os seus α-cortes para $\alpha \in [0,1]$. Mostre que $A + B$ também é um número fuzzy.

Questão 4.
Considere as funções $\min, \max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por

$$\min(x, y) = \min\{x, y\} \quad \text{e} \quad \max(x, y) = \max\{x, y\}.$$

(a) Utilize o princípio de extensão de Zadeh para estender o domínio de min e max a $\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Especificamente, denote os resultados das extensões de min e max aplicados ao produto cartesiano fuzzy $A \times B$, sendo $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, usando os símbolos $A \sqcap B$ e $A \sqcup B$. Note que $A \sqcap B$ e $A \sqcup B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Defina $(A \sqcap B)(z)$ e $(A \sqcup B)(z)$ usando o princípio de extensão.

(b) Sejam A e B os conjuntos fuzzy cujas funções de pertinência são as funções characterísticas dos intervalos não-vazios $[\underline{a}, \overline{a}]$ e $[\underline{b}, \overline{b}] \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente. Determine $A \sqcap B$ e $A \sqcup B$.

— **RASCUNHO** —

MT 601
MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO
EXAME DE QUALIFICAÇÃO MARÇO/2020

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, e considere o problema

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Explique como aplicar o Método de Newton convenientemente e cite vantagens e desvantagens deste método.

(b) Analise a aplicação de um outro método, comparando-o com o item a).

$\boxed{2}$ Considere o problema,

$$\text{Otimizar} \quad 2x_1 + x_2 \quad \text{sujeita a} \quad x_1^2 = x_2^3 \quad \text{e} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 2,$$

e sejam $v = (0,0)^T$, $w = (1,0)^T$, $y = (1,1)^T$ e $z = (-1,1)^T$. Identifique quais desses pontos satisfazem as condições necessárias de primeira ordem e use as condições suficientes para classificá-los.

$\boxed{3}$ Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1$, e considere o problema

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad g(x) \leq 0.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, seja x^k um minimizador local da função penalizada

$$E_k(x) = f(x) + \frac{1}{\rho_k} \exp\{\rho_k \, g(x)\},$$

em que $\rho_k > 0$ e $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \infty$. Observe que a função de penalidade não é nula no conjunto viável. Prove que se x^* é um ponto de acumulação da sequência (x^k) e $\nabla g(x^*) \neq 0$, então x^* é um ponto estacionário do problema original.

$\boxed{4}$ Sejam $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, h \in C^2$, e considere o problema de otimização

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeita a} \quad h(x) = 0.$$

(a) Escreva as condições necessárias de segunda ordem para um minimizador local.

(b) Escreva as condições suficientes de segunda ordem para um minimizador local.

(c) Indique um método numérico de otimização para resolver o problema acima, explicitando os detalhes para a sua aplicação: inicialização, iteração, resolução dos subproblemas, critérios de parada, etc.

(d) Para o método indicado em (c), descreva as hipóteses necessárias para a sua utilização e as condições que garantem a convergência para um minimizador.

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 13/03/2020

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Suponha que a dinâmica de uma população (N) de peixes seja descrita pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - PN,$$

em que $K > 0$ e $r > P > 0$ são parâmetros.

(a) Interprete o modelo acima, com ênfase no termo PN, bem como os parâmetros r e P;

(b) Classifique os estados estacionários do modelo;

(c) Verifique que a equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{dN}{dt} = (r - P)N\left(1 - \frac{N}{\frac{(r-P)}{r}K}\right)$$

(d) Interprete os parâmetros K e $\frac{(r-P)K}{r}$;

Questão 2. Considere que a dinâmica de determinada doença possa ser modelada pelo sistema de equações diferenciais

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dS}{dt} & = & -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} & = & \beta SI - \gamma I \end{array}\right. .$$

em que S e I representam, respectivamente, o número de suscetíveis e de infectados na população.

(a) Dê pelo menos dois exemplos de doenças que se enquadram nesse modelo;

(b) Interprete os parâmetros β e γ. A partir de um (ou dos dois) desses parâmetros, indique uma estimativa do tempo médio da doença;

(c) Determine (e interprete) a Taxa de Reprodutibilidade Basal (R_0) para esse modelo;

(d) Numa política de controle da doença, é necessário que toda a população de suscetíveis seja vacinada? Justifique sua resposta.

Questão 3. Considere um sistema de duas espécies mutualistas dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax(t)(1-bx(t)+cy(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= py(t)(1-qy(t)+rx(t)) \end{cases}.$$

(a) Explique o termo "Mutualismo"e o significado ecológico geral do modelo.

(b) Identifique estados estacionários e esboce um Plano de Fase que ilustre as situações de atração e de repulsão do sistema.

Questão 4. (Um modelo matemático para a dinâmica de produção de células vermelhas sanguíneas- CVS) No sistema circulatório, as CVS estão constantemente sendo destruídas e repostas. Uma vez que estas células transportam oxigênio pelo organismo, em um indivíduo saudável, sua quantidade deve ser mantida em algum nível fixo. Assuma que uma fração destas células é destruída diariamente pelo baço e que a medula óssea produz um número de CVS proporcional ao número perdido no dia anterior. Tal modelo pode ser dado por:

$$\begin{cases} R_{t+1} &= (1-f)R_t + M_t \\ M_{t+1} &= \lambda f R_t \end{cases}.$$

(a) Interprete cada uma das variáveis R_t e M_t bem como os parâmetros λ e f no modelo;

(b) Faça uma análise da estabilidade do ponto de equilíbrio do modelo em função de λ;

(c) A partir do item (b), obtenha o valor de λ para um indivíduo saudável;

(d) Interprete o valor de λ obtido no item anterior;

Observação Geral

Esta prova tem por objetivo avaliar a suficiência de sua maturidade de conhecimento e argumentação na área de Biomatemática. Portanto, escreva o que considerar relevante e substancial para responder objetivamente cada questão, tanto no aspecto matemático quanto biológico do assunto tratado.

Boa Prova!

UNICAMP

EQD – Equações diferenciais Parciais e Aplicações

Questão 1. (Provão 2000–Adaptado) Uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com derivadas contínuas até a segunda ordem, é dita harmônica em $\mathbb{R}^2$ se satisfaz a equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$. Mostre que se u e u^2 são harmônicas em $\mathbb{R}^2$ então u é uma função constante.

▼ Solução. Temos $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Visto que u é harmônica, satisfaz a equação de Laplace bidimensional, logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

ainda mais, por hipótese, u^2 também é harmônica, de onde segue

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} = 0\, \cdot \tag{2}$$

Da Eq.(2) podemos escrever

$$0 = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}u^2\right)$$

ou ainda, na seguinte forma, derivando os termos entre parênteses,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot$$

Utilizando a regra do produto para a derivada, temos

$$0 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

que, rearranjando, pode ser escrita na forma

$$0 = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\cdot$$

O segundo colchetes é zero, pois, por hipótese u é harmônica, logo

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot$$

Visto que temos a soma de dois quadrados igual a zero, cada uma das parcelas deve ser igual a zero, de onde podemos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

de onde segue que $u(x, y) =$constante. c.q.d.▲

Questão 2. No estudo de populações de células com estrutura de tamanho encontramos a seguinte equação diferencial parcial

$$x\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$$

cuja solução satisfaz as condições $u(x, 0) = 0$ e $u(0, t) = t$. (a) Classifique a equação e as condições. b) Resolva a equação satisfazendo as condições.

▼ Solução. a) Equação diferencial parcial de primeira ordem, linear e homogênea. A condição $u(x, 0) = 0$ é uma condição inicial homogênea e $u(0, t) = t$ uma condição de contorno (fronteira) dependente do tempo.

b) Vamos utilizar a metodologia da transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace na variável t e usando a condição inicial, obtemos

$$xsU(x,s) - x\underbrace{u(x,0)}_{=0} + U_x(x,s) = 0$$

com a função $U(x, s) = \mathscr{L}[u(x, t)]$ sendo a transformada de Laplace da função $u(x, t)$ com parâmetro s. Devemos agora resolver a equação diferencial na variável x

$$\frac{\partial U}{\partial x} + sxU = 0$$

com solução dada por (note que s é constante, pois a derivada é em x)

$$U(x,s) = A(s)e^{-sx^2/2}$$

onde $A(s)$ é uma função que só dependende de s. Impondo a condição de contorno não homogênea, podemos escrever

$$U(0,x) = \mathscr{L}[u(0,t)] = \mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2} = A(s)\cdot$$

Voltando na solução da equação diferencial na variável x obtemos

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-sx^2/2} \cdot$$

A fim de calcular a transformada de Laplace inversa, utilizamos a expressão

$$\mathscr{L}[f(t-a)\cdot u_0(t-a)] = e^{-sa}\cdot F(s)$$

onde $u_0(t-a)$ é uma função de Heaviside, definida por

$$u_0(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

de onde segue para a solução do problema

$$u(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right)\cdot u_0\left(t - \frac{x^2}{2}\right),$$

que é o resultado desejado ▲

Questão 3. Seja $u = u(x,t)$. Resolver a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

satisfazendo as condições de contorno $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$ e a condição inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2\pi/5, \\ 1, & 2\pi/5 < x < 3\pi/5, \\ 0, & 3\pi/5 < x < \pi\cdot \end{cases}$$

▼ Solução. Vamos procurar soluções n forma de um produto de duas funções, $R(x)$ dependendo somente de x e $T(t)$ dependendo somente de t, isto é,

$$u(x,t) = R(x)T(t)\cdot$$

Introduzindo esse produto da equação diferencial e rearranjando de forma conveniente, podemos escrever

$$\frac{R''}{R} = \frac{T'}{T} = \lambda$$

onde λ é uma constante de separação. Visto que as condições para este problema são separáveis, temos

$$u(0,t) = R(0)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad R(0) = 0,$$

$$u(1,t) = R(\pi)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad R(\pi) = 0.$$

Assim, devemos resolver o seguinte sistema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} R'' - \lambda R = 0, & 0 < x < \pi \\ R(0) = 0 = R(\pi) \end{cases}$$

com solução (autovalores) $\lambda_k = -k^2$ com $k = 1, 2, \ldots$ e as correspondentes autofunções dadas por

$$R_k(x) = B_k \operatorname{sen}(kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

onde B_k são constantes. Para a equação na variável t devemos resolver

$$T' + k^2 T = 0$$

com solução dada por

$$T_k(t) = C_k \, e^{-k^2 t}$$

onde C_k é uma outra constante arbitrária. Voltando na solução, temos

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx)$$

onde $c_k = B_k C_k$ é uma constante. A fim de determinar essa constante, utilizamos a outra condição (inicial) dada do problema, logo

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kx)$$

que é uma série de Fourier cujos coeficientes são dados por

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \operatorname{sen}(kx) \, \mathrm{d}x \cdot$$

Substituindo os dados do problema, devemos calcular a integral

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/5}^{3\pi/5} \operatorname{sen}(kx) \, \mathrm{d}x$$

de onde segue

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\left[\cos(2k\pi/5) - \cos(3k\pi/5)\right]\cdot$$

Utilizando a relação trigonométrica envolvendo a diferença de dois cossenos, podemos escrever a expressão para os coeficientes,

$$a_k = \frac{4}{k\pi}\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{2}\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{10}$$

de onde segue para a solução

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{10}(2k+1)\right]\,e^{(2k+1)^2 t}\,\text{sen}\,[(2k+1)x]$$

que é o resultado desejado. ▲

Questão 4. Encontre a solução da equação de onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

com $c^2 > 0$, satisfazendo, em $0 < x < 1$, as condições iniciais $u(x,0) = 1$ e $\left.\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|_{t=0} = 0$, e as condições de contorno $u(0,t) = 1$ e $u(1,t) = 0$.

▼ Solução. Visto que temos condições não homogêneas, começamos propondo uma solução da forma

$$u(x,t) = v(x,t) + h(x)$$

onde $h(x)$ depende somente da variável x. Substituindo na equação diferencial parcial, obtemos duas equações, uma parcial e a outra ordinária,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}h(x) = 0\cdot$$

Por outro lado, em relação às condições temos

$$v(0,t) = 0 = v(1,t) \qquad h(0) = 1 \text{ e } h(1) = 0\cdot$$

Resolvendo o sistema composto pela equação diferencial ordinária e as respectivas condições obtemos para a função estacionária $h(x) = 1 - x$.

Logo, devemos resolver o seguinte problema composto pela equação diferencial parcial, na variável dependente $v(x,t)$, satisfazendo as respectivas condições de contorno e iniciais

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)$$

$$v(0,t) = 0 = v(1,t), \quad v_t(x,0) = 0, \quad v(x,0) = x \cdot$$

Utilizando separação de variáveis, vamos propor uma solução na forma

$$v(x,t) = R(x)T(t)$$

de onde obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$R'' - \lambda R = 0 \qquad \text{e} \qquad T'' - c^2\lambda T = 0$$

onde λ é uma constante de separação. Em analogia a questão anterior, o problema de Sturm-Liouville na variável x só fornece solução não trivial para valores de $\lambda = -(n\pi)^2$ com $n = 1, 2, \ldots$ (autovalores) enquanto as autofunções são tais que

$$R_n(x) = C_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

com C_n constante. Por outro lado, a equação na variável t tem solução dada por

$$T(t) = A\cos(cn\pi t) + B\operatorname{sen}(cn\pi t)$$

com A e B são constantes. Impondo a condição homogênea na variável t obtemos $B = 0$ de onde segue a solução

$$T_n(t) = B_n\cos(cn\pi t)$$

com B_n constante. Introduzindo a notação $C_nB_n = a_n$ podemos escrever

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(n\pi ct) \cdot$$

Enfim, impondo a condição não homogênea, obtemos

$$v(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

que é uma série de Fourier com coeficientes dados por

$$a_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x)\, \mathrm{d}x \cdot$$

Calculando a integral, obtemos para os coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot$$

Voltando com as soluções obtidas (problema envolvendo a equação diferencial parcial e problema envolvendo a equação ordinária) temos

$$u(x,t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\pi x) \cos(n\pi c t)$$

que é a solução do problema de partida. ▲

Questão 5. Seja $u = u(r,\theta)$. Obtenha soluções finitas para o problema de valor na fronteira

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \\ u(1,\theta) &= 1 - \cos^2\theta \cdot \end{cases}$$

▼ Solução. Como o problema tem simetria esférica, escrevemos o Laplaciano em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) e ainda como a condição de fronteira não depende de ϕ, obtemos a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

com $u = u(r,\theta)$.

Usando o método de separação de variáveis, buscamos a solução na forma

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta) \cdot$$

Substituindo na equação diferencial e rearranjando, podemos escrever

$$r^2 \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right) = -\frac{1}{T}(T'' + \cot\theta T') = \alpha$$

onde α é a constante de separação.

A equação na parte angular pode ser escrita na forma

$$T''(\theta) + \cot\theta T'(\theta) + \alpha T(\theta) = 0$$

que, com a mudança de variável $x = \cos\theta$ nos leva à seguinte equação

$$(1 - x^2)T''(x) - 2xT'(x) + \alpha T(x) = 0$$

onde $x \in [-1, 1]$. A fim de que tenhamos soluções finitas no intervalo fechado $[-1, 1]$ a constante de separação deve ser do tipo $\alpha = \ell(\ell+1)$ com ℓ um inteiro não negativo. Assim, podemos escrever

$$(1 - x^2)T''(x) - 2xT'(x) + \ell(\ell + 1)T(x) = 0$$

que é a equação de Legendre de ordem ℓ com solução geral dada por

$$T_\ell(x) = A_\ell P_\ell(x) + B_\ell Q_\ell(x)$$

sendo A_ℓ e B_ℓ constantes. Visto que as funções $Q_\ell(x)$ não são finitas em $x = \pm 1$, sobrando apenas que as possíveis soluções finitas em $[-1, 1]$ da equação de Legendre são os polinômios de Legendre, que já voltando na variável θ permite escrever

$$T_\ell(\theta) = P_\ell(\cos\theta).$$

Por outro lado, a equação radial, já com o valor da constante de separação incorporado, é tal que

$$r^2 R'' + rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

que é uma equação tipo Euler, cuja solução finita para $r = 0$ é somente

$$R_\ell(r) = r^\ell \cdot$$

Com a solução das duas equações ordinárias temos que para cada valor de ℓ temos uma solução da equação diferencial parcial

$$u_\ell(r, \theta) = r^{ell} P_\ell(\cos\theta) \cdot$$

O princípio de superposição nos diz que a solução do problema de valor na fronteira pode ser escrita na seguinte forma

$$u(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

com a_ℓ coeficientes a serem determinados.

Impondo a condição de fronteira (contorno) obtemos

$$u(1,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)\cdot$$

Usando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'}$$

e já escrevendo a condição de fronteira como $u(x,1) = 1 - x^2$ podemos escrever

$$u(1,x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x) = 1 - x^2$$

sendo os coeficientes desta série de Fourier-Legendre dados por

$$a_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,P_\ell(x)\,\mathrm{d}x\cdot$$

Como $f(x) = 1-x^2$ é um polinômios de grau dois, temos que $a_\ell = 0$ se $\ell \geq 3$. Devemos, agora, calcular as integrais restantes, para a_0, a_1 e a_2. Logo,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cdot 1\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}$$

enquanto $a_1 = 0$, pois $P_1(x) = x$ é ímpar. Temos, então para as soluções finitas do problema de valor na fronteira

$$u(r,\theta) = a_0 r^0 P_0(\cos\theta) + a_2 r^2 P_2(\cos\theta)$$

ou ainda, já simplificando, na seguinte forma

$$u(r,\theta) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

que é o resultado desejado. ▲