Exame de qualificação
MT401

Prof. Christian Rodrigues e
Prof. Ricardo Mosna

18 de março de 2019

Nome: ____

RA: ____

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- **Desligue o celular.**
- **NÃO retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.**
- **Serão consideradas 4 questões com pontuação mais alta.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Justifique suas respostas!

Q1. (2,5) Mostre explicitamente que:

a) todo espaço normado de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo ao espaço obtido com a norma euclidiana $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_2)$.

b) se E e F forem espaços normados de mesma dimensão finita, sobre o mesmo corpo, então E e F serão isomorfos.

c) de um modo geral, normas equivalentes em um espaço normado induzem a mesma topologia.

Q2. (2,5) Considere o espaço das sequências limitadas escalares (em um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$l^\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\},$$

munido da norma

$$||(a_j)_{j=1}^{j=\infty}|| = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

a) Seja $M \subset l^\infty$ formado por todas as sequências $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ com no máximo um número finito de termos não nulos. M é espaço de Banach? Justifique.

b) Seja $c_0 \subset l^\infty$ o subconjunto de todas as subsequências escalares que convergem para zero, ou seja,

$$c_0 = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j \to 0 \right\}.$$

Mostre que c_0 é espaço de Banach.

Q3. (2,5) Considere

$$c = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j \to \infty} a_j \text{ existe em } \mathbb{K} \right\},$$

o conjunto das sequências convergentes formadas por elementos de $\mathbb{K}$. Mostre que c é um subespaço fechado de l^∞.

Q4. (2,5) Mostre que:

a) se E é espaço reflexivo, então E' é reflexivo.

b) de um modo geral, todo espaço de Hilbert H é isomorfo ao seu bidual $H'' = (H')'$.

Q5. (2,5) Seja (X, d) um espaço métrico completo, $x_0 \in X$ e $\beta \in [0, 1)$. Considere o operador T que leva toda função limitada f em (X, d) na função constante $\beta f(x_0)$.

a) Mostre que este operador é uma contração com um único ponto fixo e o encontre.

b) Mostre que a sequência de iterações $f, Tf, T(Tf), \ldots$ converge para o ponto fixo, independente de como a função limitada é escolhida.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Exame de qualificação
MT401

Prof. Christian Rodrigues e
Prof. Yuri Bozhkov

28 de agosto de 2018

Nome: ______________________________

RA: ______________________________

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Q6	
Total	

- **Desligue o celular.**
- **NÃO retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.**
- **Serão consideradas 4 questões com pontuação mais alta.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Justifique suas respostas!

Q1. **(2,5)** Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Mostre que o conjunto dos pontos fixos de f é compacto.

Q2. (2,5) Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, ou seja, se existir $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Sobre o conjunto $B(X)$ de todas as funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, podemos definir

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Mostre que $(B(X), ||\cdot||_\infty)$ é um espaço vetorial normado completo, ou seja, que é espaço de Banach.

Q3. (2,5) Considere o conjunto das matrizes reais $m \times n$ (com m e n fixos).

a) Mostre que o espaço M formado por essas matrizes é isomorfo a algum $\mathbb{R}^d$.

b) Mostre que todas as normas em M são equivalentes.

c) Mostre que, de um modo geral, normas equivalentes em um espaço normado induzem a mesma topologia.

Q4. (2,5) (O Teorema de Hahn-Banach para espaços de Hilbert) Sejam H um espaço de Hilbert, F um subespaço de H e $\varphi \in F'$. Prove, sem usar o Teorema de Hahn-Banach, que existe um *único* funcional $\Phi \in H'$ que estende φ e preserva a norma.

Q5. (2,5) Seja H um espaço de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes (entre si) para um operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$.

a) $T \circ T^* = T^* \circ T$.

b) $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$ para todos $x, y \in H$.

Neste caso o operador T é chamado operador normal.

Lembre-se que dados dois espaços normados E e F e um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$, definimos $T' : F' \to E'$ dado por $T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x))$, para todo $x \in E$ e $\varphi \in F'$. Em particular, dado um espaço de Hilbert H, definimos a aplicação $u_H : H \to H'$, dada por $u_H(x)(y) = \langle y, x \rangle$ para todos $x, y \in H$ e $T^* = u_H^{-1} \circ T' \circ u_H$.

Q6. (2,5) Um dos modelos mais famosos para descrever a dinâmica de populações é o chamado *modelo logístico*, descrito pela aplicação $T : [0,1] \to [0,1]$,

$$T(x) = \alpha x(1-x),$$

onde $\alpha \in I \subset \mathbb{R}$ decodifica a taxa de crescimento populacional e o tamanho da população no instante n é dado por $x_n = T(x_{n-1}) = \overbrace{T \circ \ldots \circ T}^{\text{n vezes}}(x_0)$, para $x_0 \in [0,1]$.

a) Encontre α tal que a dinâmica tenha um único estado de equilíbrio $x_f \neq 0$, ou seja, tal que, para todo $x_0 \in (0,1)$ exista um único x_f, que $T^n(x_0) \to x_f$. Justifique sua resposta!

b) Encontre o valor de x_f.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Exame Qualificação – Análise Numérica – 1S/2019

Aluno: RA:

Questão 1

Mostre um método explícito e estável, com a respectiva análise de consistência, estabilidade e convergência, para aproximação do modelo hiperbólico ($a \in \Re$), supondo u e η suficientemente suaves,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \Re, \quad t > 0, \qquad u(x, t = 0) = \eta(x). \tag{1}$$

Além disso, enuncie o Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer, que estabelece a relação entre consistência, estabilidade e convergência na análise do Método de Diferenças Finitas para a solução numérica de equações diferenciais parciais lineares. Explique também o comportamento esperado das aproximações numéricas produzidas pelo método explícito estável via análise da equação modificada.

Questão 2

Considere uma função $f(u)$ Lipschitz contínua que está associada ao Problema de Valor Inicial autônomo (PVI)

$$u' = f(u), \qquad 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta. \tag{2}$$

Um método linear de r passos para a aproximação de (2) pode posto na forma (com $\alpha_r = 1$):

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}). \tag{3}$$

a) Mostre que o método (3) será consistente com o PVI (2) se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j$$

b) Defina estabilidade zero para o método (3).

c) Qual é a condição para que o método numérico (3) seja explícito?

Questão 3

Apresente a discretização do método de Diferenças Finitas de cinco pontos para a aproximação numérica do problema de valor de contorno a seguir. Seja um domínio quadrado unitário $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u(x,y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega. \tag{4}$$

Utilizando a norma $\|A\|_2$, demonstre para o esquema de 5 pontos, sua consistência, estabilidade e convergência.

Apêndice

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ onde ρ denota o raio espectral.
- $u_{ij}^{p,q} = \sin(p\pi i h)\sin(q\pi j h)$
- $\lambda_{p,q} = \dfrac{2}{h^2}\left[(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)\right]$

MT503 – Programação Linear

Exame de Qualificação – 22/03/2019

Nome: ______________________________ RA: ____________

1. As perguntas a seguir referem-se ao par primal-dual P e D (min-max) de um problema de programação linear na forma canônica.

   (a) Se uma solução BÁSICA para o primal é INFACTÍVEL e o valor da função-objetivo neste ponto é MENOR que o valor da função-objetivo no ponto ótimo, então a solução dual associada a este ponto primal infactível é dual factível. Verdadeiro ou Falso? Explique sua resposta.

   (b) Se P tem solução ótima alternativa e se w^* é a solução ótima associada do dual para D então w^* deve ser uma solução degenerada. Verdadeiro ou Falso? Explique sua resposta.

   (c) Seja z^* o valor da função-objetivo do primal e do dual no ótimo. Suponha que $\overline{x}$ é uma solução primal INFACTÍVEL cuja solução dual associada $\overline{w}$ seja FACTÍVEL. É possível que o valor da função-objetivo no ponto $\overline{x}$ seja igual a z^*? Explique sua resposta.

   (d) Se P tem solução ILIMITADA, é possível trocar o vetor b de P para um vetor $\overline{b}$ que faça com que o problema P tenha um ótimo FINITO? Explique sua reposta.

---

2. Considere o seguinte tableau simplex para um problema de otimização linear (as restrições são todas do tipo "$\leq$" e x_3, x_4 e x_5 são variáveis de folga).

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	a	0	b	0	f
0	1	-2	0	1	0	c
0	0	-1	1	2	0	d
0	0	0	0	3	1	e

   Suponha que $a < 0, b \leq 0$. E, $c, d, e \geq 0$. Pede-se:

   (a) Determine B^{-1} e B.

   (b) O tableau está no ótimo?.

   (c) Dê a solução do tableau original.

   Agora, considere $a > 0, b \leq 0$. E, $c, d, e \geq 0$.

   (d) O novo tableau é ótimo?

   (e) Dê as direções extremas.

   (f) $a = 3$ e $f = -8$. Dê a solução com $z = -200$.

---

3. Considere o problema auto-dual, onde M é anti-simétrica: $M^t = -M$:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^t x \\ \text{s. a} & Mx \geq -c \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(a) Mostre que o dual deste problema é ele mesmo.

(b) Encontre as condições de complementaridade para este problema.

---

4. O problema de regressão L_∞ pode ser formulado como um PL:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \beta \\ \text{s. a} & Ax - e\beta + v = b, \\ & Ax + e\beta - u = b, \quad (u, v) \geq 0, \end{array}$$

$\beta \in \Re, A \in \Re^{m \times n}, x, b, u, v, e$ vetores com dimensões apropriadas e $m < n$.

(a) Encontre o dual deste problema.

(b) Determine as condições de otimalidade para esses problemas.

(c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método primal-dual.

(d) Encontre o sistema de equações normais deste problema através da eliminação de variáveis.

Boa prova!

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

MT601 Exame de Qualificação

Profas.: Maria A. Diniz-Ehrhardt e Sandra A. Santos Março/2019

1. Considere o problema de minimização irrestrita:

$$\min f(x), \tag{1}$$

em que $f : I\!R^n \to I\!R, f \in C^2$.

a) Suponha que vamos aplicar o método de Newton para resolver (1) localmente, isto é, sem qualquer estratégia de busca linear. Cite vantagens e desvantagens da aplicação deste método na resolução de (1).

b) Os métodos quase–Newton também podem ser usados para resolver o problema (1). Entre eles, está a classe dos métodos secantes. Descreva as principais ideias desta classe de métodos, apontando vantagens e desvantagens em comparação ao método de Newton.

---

2. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Escrevendo $F(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x))^T$, defina $\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m f_i(x)^2$. Suponha que o conjunto de nível $\mathcal{L}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) \leq \Phi(x^0)\}$ é compacto, e que a matrix Jacobiana $J_F(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto completo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Defina o seguinte algoritmo, começando por $x^0 \in \mathbb{R}^n$:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \left[J_F(x^k)^T J_F(x^k)\right]^{-1} J_F(x^k)^T F(x^k),$$

em que λ_k é o primeiro elemento da sequência $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ que satisfaz a condição de Armijo para Φ, com $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Prove que a sequência gerada possui um ponto limite x^* para o qual $\nabla\Phi(x^*) = 0$.

---

3. Considere o problema (P) de minimizar $f(x)$ sujeita a um conjunto de restrições lineares de desigualdade, do tipo *menor do que ou igual a*. Seja $\widehat{x}$ um ponto viável para (P), e suponha que o conjunto de restrições ativas nesse ponto é representado por $Ax = b$, em que $A \in I\!R^{m\times n}$, com posto$(A) = m$. Seja $d = -\nabla f(\widehat{x})$ e considere o seguinte problema

$$(\widehat{\mathrm{P}}) \qquad \min_x \left\{\frac{1}{2}\|x - (\widehat{x} + d)\|^2 \ : \ Ax = b\right\},$$

cuja solução será denotada por $\widetilde{x}$.

a) Interprete geometricamente o problema $(\widehat{\mathrm{P}})$ e sua solução $\widetilde{x}$.

b) Escreva as condições KKT para o problema $(\widehat{\mathrm{P}})$. Tais condições são necessárias e suficientes para otimalidade? Explique.

c) Suponha que o ponto dado $\widehat{x}$ seja um ponto KKT de $(\widehat{\mathrm{P}})$. Estabeleça condições sob as quais $\widehat{x}$ também será ponto KKT de (P).

d) Exiba uma fórmula fechada para a solução $\widetilde{x}$ do problema $(\widehat{\mathrm{P}})$.

---

vire →

4. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x), \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{S} \end{array} \tag{2}$$

em que $f : I\!R^n \to I\!R$ e $\mathcal{S} \subset I\!R^n$.

Os métodos de penalização externa para resolver (2) baseiam-se na resolução de uma sequência de problemas irrestritos, associados ao problema original, da forma

$$\min_x q_\rho(x),$$

com $q_\rho(x) = f(x) + \rho P(x)$, em que $\rho > 0$ é uma constante e $P : I\!R^n \to I\!R$ é uma função de penalização para $\mathcal{S}$.

a) Descreva o esquema algorítmico de métodos de penalização e as principais propriedades da função P.

b) Suponha que a função $q_{\overline{\rho}}(x)$ assume um mínimo global em $\overline{x} \in \mathcal{S}$.
Prove que:

b$_1$) o ponto $\overline{x}$ é um minimizador global do problema (2);

b$_2$) se x^k é minimizador global de $q_{\rho_k}(x)$, com $\rho_k > 0$, então $f(\overline{x}) \geq f(x^k)$.
Interprete este resultado.

Exame de Qualificação em Biomatemática

Parte A: Escolha uma das questões abaixo:

-Modelo Ross-MacDonald para Malária (e outras doenças *vetoriais*)

Considere sub-populações de Humanos Susceptíveis, S, Infectados (também infecciosos), I, e removidos (imunizados) R, e sub-populações de Mosquitos (vetores) Infectados (Infecciosos) M, e Susceptíveis m. Suponha que a infecção de humanos se faz por ação de mosquitos infecciosos/infectados em humanos susceptíveis e a infecção de mosquitos se dá por ação de mosquitos em humanos infectados/infecciosos. Suponha que a população humana seja constante no período de observação e que a reprodução de mosquitos decorra de uma dinâmica vital de Verhulst que produz apenas mosquitos susceptíveis originários igualmente das duas sub-populações e uma mortalidade Malthusiana.

1-Escreva um modelo para este cenário como um sistema de EDO de dimensão 5 (S,I,R,m,M) utilizando taxas de contacto Holling I para infecções.("Lei" de Ação de Massas)

2-Considere a população total de mosquitos, $m+M$, em Estado Estacionário.

3-Obtenha então a Equação desacoplada para Mosquitos infectados M em Estado Quase estacionário. Argumente sobre a validade desta hipótese considerando as escalas de tempo característico para as dinâmicas de mosquito e humanos.

4-Utilizando a argumentação acima obtenha um sistema linear reduzido (desacoplado de R,M,m) para S e I.

5-Analise este sistema final quanto à sua dinâmica e às interpretações biológicas de interesse.

-Modelo de Ludwig-Holling

1-Escreva o Modelo de presa predador de Ludwig-Holling: Predadores em estado estacionário exercendo uma ação predatória Holling III sobre as presas que se reproduzem segundo uma dinâmica vital de Verhulst.

2-Argumente biologicamente sobre as circunstâncias que justificariam a utilização do modelo de predação Holling III .

3-Adimensionalize a Equação para a dinâmica da Presa.

4-Analise a existência dos estados estacionários estáveis e os fenômenos de bifurcação e histerese para este modelo.

Parte B:

1. Considere um subsistema ecológico com três espécies de reprodução sazonal (isto é, reproduzem-se apenas uma vez ao ano na mesma época). Em todas as espécies há competição intraespecífica, mas uma delas é predadora das outras duas que competem entre si (interespecificamente) por recursos. Modele este convívio, justificando suas escolhas. Supondo obtidos os estados estacionários, como caracterizá-los?
2. Uma das formas iniciais de combater o *Aedes aegypti*era por meio de fumegação de regiões urbanas e peri-urbanas com inseticida (o tal "fumacê"). Esta prática matava alguns desses insetos mas também muitos outros. Crie um modelo que descreva essa situação para duas espécies de insetos que interagem (pode ser presa-predador, pode ser competição, pode ser comensalismo, a escolha é sua...).
3. Em muitas cidades do estado de São Paulo, a dengue recrudesceu. O contágio se dá através das picadas de *Aedes aegypti* portadores do vírus – e esses insetos se tornam portadores

depois de picar um ser humano infectado. Considere esta situação epidemiológica e construa um modelo para ela, forçosamente um modelo de longo prazo (de acordo com um texto do Instituto Fiocruz, “No Brasil, os primeiros relatos de dengue datam do final do século XIX, em Curitiba (PR), e do início do século XX, em Niterói (RJ). No início do século XX, o mosquito já era um problema, mas não por conta da dengue -- na época, a principal preocupação era a transmissão da febre amarela. Em 1955, o Brasil erradicou o *Aedes aegypti* como resultado de medidas para controle da febre amarela. No final da década de 1960, o relaxamento das medidas adotadas levou à reintrodução do vetor em território nacional. Hoje, o mosquito é encontrado em todos os Estados brasileiros.”). Modele esta epidemia am alguma região brasileira, justificando suas escolhas e decisões. Sem fazer as contas, descreva como deveria proceder para achar pontos estacionários relevantes e o modo de caracterizá-los.

4. Considere, numa modelagem matemática com duas dinâmicas populacionais que interagem, em que as trajetórias das soluções sempre entram numa determinada região convexa onde existe um estado estacionário instável (ou repulsor). Descreva sucintamente algumas possibilidades em que isto pode ocorrer.
5. Descreva uma situação em que seria preferível usar uma modelagem discreta, com equações de diferenças e outra em que seria necessário usar Equações Diferenciais pela continuidade, destacando os motivos para esta diferença.
6. Discorra sobre algum assunto de Biomatemática que as questões anteriores não abordaram

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
22/03/2019
COMBINATÓRIA ENUMERATIVA

NOME:________________________________RA:____________

Resolver, completamente, 5 questões dentre as 9 dadas abaixo.

1- Encontrar o número de soluções, em inteiros não negativos, para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$, nas quais exatamente duas incógnitas são nulas.

2-(a)Definir os polinômios de Gauss. Dar, pelo menos, uma interpretação combinatória para estes polinômios.
(b) Calcular os seguintes valores para o polinômio de Gauss comentando o significado combinatório de seus coeficientes: $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
(c) Enunciar uma relação de recorrência verificada pelos polinômios de Gauss fornecendo uma demonstração para a mesma.

3-Mostrar que, para $1 \leq j \leq n,$ o número de partições de n nas quais j aparece como parte é igual ao número de partições de n-j .

4- Quantas são as n-sequencias quaternárias contendo um número impar de zeros, um número par de 1's e um número impar de 3's.

5- Dar uma prova, por argumentos combinatórios, para a seguinte identidade:

$$\prod_{i=1}^{\infty} 1/(1 - xq^i) = \sum_{0}^{\infty} \frac{q^k x^k}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)}$$

6-Quantas permutações diferentes existem em S_{12}com os seguintes tipos cíclicos?

(a) $x_2^3 x_6$; (b) $x_1^4 x_3 x_5$

7-Quantos padrões diferentes podem ser formados ao se colorir os quadrados de um tabuleiro 5X5 com as cores branco e preto de maneira que existam 15 quadrados pretos e 10 quadrados brancos?

8- Prove que, se n é ímpar, então uma partição de n tendo a terceira parte igual a 2 não pode ser auto-conjugada.

9- Fornecer pelo menos 2 identidades combinatórias, envolvendo funções geradoras e as respectivas interpretações combinatórias.