Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

12 de Setembro de 2025

Instruções:

- *A prova é composta de 4 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha utilizada.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1:

Seja $W_1, W_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e indênticamente distribuídas com densidade,

$$f(w) = \frac{1}{\theta} w^{\frac{1}{\theta}-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(w), \quad \theta \text{ parâmetro positivo.}$$

i. Postule uma função adequada g, defina $Y_n := g(W_n), n \geq 1$, e $\overline{Y}_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ e prove que

$$\sqrt{n}\Big(\overline{Y}_n - \theta\Big) \to N\Big(0, \theta^2\Big), \text{ \underline{em distribuição}, quando } n \to \infty. \tag{1}$$

ii. Fixe um valor $\Delta > 0$ e identifique uma função adequada h e o valor de a tais que

$$\sqrt{n}\Big(h(\overline{Y}_n) - a\Big) \to N\Big(0, \Delta\Big), \text{ \underline{em distribuição}, quando } n \to \infty. \tag{2}$$

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 2:

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, tais que a distribuição de X_n é dada pela densidade

$$f_{X_n}(x) = \theta_n^{-1} e^{-(x-a_n)/\theta_n} \mathbb{I}_{(a_n,\infty)}(x), \tag{3}$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais e $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais positivos.

Verifique, em cada caso, se ocorre o tipo de convergência especificada.

i. Se $a_n = -\frac{1}{n}$ e $\theta_n = \frac{1}{n}$,
$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to 0,$$
quando $n \to \infty$, quase certamente e em probabilidade.

ii. Se $a_n = a$ (constante) e $\theta_n = \frac{1}{n^2}$,
$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \to a,$$
quando $n \to \infty$, quase certamente e em probabilidade.

iii. Defina $Y_n := e^{-W_n}$, onde W_n apresenta densidade $f_{W_n}(w) = \theta^{-1}e^{-w/\theta}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$. Considere na Equação (4), $a_n = a$ e $\theta_n = \frac{1}{n^2}$ como no item anterior,
$$\frac{X_1 + ... + X_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}}{Y_1 + ... + Y_n} \to c,$$
quando $n \to \infty$, quase certamente e em probabilidade. Identifique o valor c.

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 3:

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, tais que a distribuição de X_n é dada pela densidade

$$f_{X_n}(x) = \theta_n^{-1} e^{-(x-a_n)/\theta_n} \mathbb{I}_{(a_n,\infty)}(x), \tag{4}$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais e $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais positivos.

i. Determine a função característica de X_n e identifique $\mathbb{E}(X_n)$ e $\mathbb{V}ar(X_n)$.

ii. Defina $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ e postule alguma condição que permita garantir a seguinte convergência e que envolva os valores genéricos de a_n e/ou θ_n,

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{(\mathbb{V}ar(S_n))^{1/2}} \to N(0,1), \underline{\text{em distribuição}}, \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{5}$$

iii. Verifique a condição identificada no item anterior, adaptando-a se for necessário, para o caso: $\theta_n = n^2$ e $a_n = n^2,\ n = 1, 2, ...$

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 4:

Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, isto é, sua função densidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = \mathbb{I}_{(0,1)\times(0,1)}(x, y).$$

i. Mostre que a função densidade conjunta de $Z = XY$ e X é dada por

$$f_{Z,X}(z, x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < z < x < 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

ii. Calcule $\mathbb{E}(X|Z = z)$.

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

22 de Agosto de 2025

Instruções:

- *A prova é composta de 4 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha utilizada.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1: (*2,5 pontos*)

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade,

$$f(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{[x_0,\infty)}(x), \;\; x_0 \text{ constante fixa e } \alpha \text{ parâmetro positivo.}$$

i. Postule uma função adequada g, defina $Y_n := g(X_n), n \geq 1$, e $\overline{Y}_n := \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ e prove que

$$\sqrt{n}\Big(\overline{Y}_n - \frac{1}{\alpha}\Big) \to N\Big(0, \frac{1}{\alpha^2}\Big) \; \underline{\text{em distribuição}}, \text{ quando } \; n \to \infty. \tag{1}$$

ii. Identifique uma função adequada h e o valor de a tais que

$$\sqrt{n}\Big(h(\overline{Y}_n) - a\Big) \to N\Big(0, 1\Big) \; \underline{\text{em distribuição}}, \text{ quando } \; n \to \infty. \tag{2}$$

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 2: (*2,5 pontos*)

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, tais que a distribuição de X_n é dada pela densidade

$$f_{X_n}(x) = \frac{\lambda_n}{2} e^{-\lambda_n |x - \alpha_n|} \mathbb{I}_{-\infty,\infty)}(x). \tag{3}$$

Onde $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais e $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais positivos.

Verifique, em cada caso, se ocorre o tipo de convergência especificada. E em caso afirmativo, determine todos os valores envolvidos, a constante limite c e valores esperados $\mathbb{E}$,

i.
$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n) - \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \to c, \text{ quando } n \to \infty,$$

<u>quase certamente</u> e <u>em probabilidade</u>.

i.1 Se $\lambda_i = i$ e $\alpha_i = i, i = 1, ..., n$, i.2 Se $\lambda_i = i^k$ onde $k : k \geq 0$ e $\alpha_i = i^3, i = 1, ..., n$.

ii. Seja $Y_n := |X_n - \alpha_n|$ onde X_n apresenta a densidade dada pela da Equação (**??**), com $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \geq 1$. Mostre que

$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n) - \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{Y_1 + \cdots + Y_n} \to c, \text{ quando } n \to \infty,$$

$\underline{\text{quase certamente}}$ e $\underline{\text{em probabilidade}}$.

ii.1 Se $\lambda_i = i$ e $\alpha_i = i, i = 1, ..., n$,

ii.2 Se $\lambda_i = i^k$ onde $k : k \geq 0$ e $\alpha_i = i^3, i = 1, ..., n$.

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 3: (*3 pontos*)

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, tais que a distribuição de X_n é dada pela densidade

$$f_{X_n}(x) = \frac{\lambda_n}{2} e^{-\lambda_n |x - \alpha_n|} \mathbb{I}_{-\infty, \infty)}(x),$$

Onde $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais e $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de valores nos reais positivos.

i. Determine a função característica de X_n e identifique $\mathbb{E}(X_n)$ e $\mathbb{V}ar(X_n)$.

ii. Defina $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Postule alguma condição que permita garantir a seguinte convergência e que envolva os valores genéricos de α_n e/ou λ_n,

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{(\mathbb{V}ar(S_n))^{1/2}} \to N(0, 1), \underline{\text{em distribuição}}, \text{ quando } n \to \infty. \tag{4}$$

iii. Verifique a condição identificada no item anterior, adaptando-a se for necessário, nos casos em que (a) $\lambda_i = \frac{1}{i}, i \in \{1, 2, ...\}$ e (b) $\lambda_i = \frac{1}{i^M}, i \in \{1, 2, ...\}, M = 1, 2, 3, ...$

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

Questão 4: (*2 pontos*)

Sejam N e $\{V_k : k \geq 1\}$ variáveis aleatórias independentes, onde

$$P(N = n) = \frac{1}{(e-1)n!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e $V_k \sim \text{Uniforme}[0, 2]$. Definimos

$$W = \min\{V_1, V_2, \dots, V_N\}.$$

Obtenha a distribuição de W (função distribuição acumulada e densidade de probabilidade).

Dica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-w/2)^n}{n!} = e^{1-w/2} - 1$.

Nota: **Cada resultado teórico a ser utilizado para a resolução dos itens deve ser citado na íntegra. Você deve verificar cada uma das premissas utilizadas nos resultados.**

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

08/01/2025

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada (use apenas um lado da folha, não use frente e verso).

4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente. Responda mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

5. Tranquilidade e Boa Sorte.

1. Suponha que n adultos do sexo masculino hipertensos foram selecionados aleatoriamente para o uso de uma nova droga para pressão arterial no início de um ensaio clínico para acessar a eficácia desta nova droga. Suponha também que cada paciente é examinado ao final de cada mês de acompanhamento para verificar se a hipertensão voltou. Seja x_i a idade do i-ésimo paciente no início do ensaio clínico, e seja Y_i a variável aletória (v.a.) denotando o número de meses de acompanhamento até que a hipertensão volte pela primeira vez. É razoável assumir que Y_i tem distribuição geométrica

$$P(y_i;\theta_i) = (1-\theta_i)^{y_i-1}\theta_i\, I_{\{1,2,\dots\}}(y_i), \quad 0<\theta_i<1, \;\; i=1,2,,\dots,n.$$

É bem estabelecido que a idade é um fator de risco para hipertensão. Para levar em consideração as diferenças de idade dos pacientes no início do estudo, é proposto que θ_i, a probabilidade da primeira vez em que a hipertensão retorna para o i-ésimo paciente, seja expresssa pela segunite função:

$$\theta_i = \beta x_i/(1+\beta x_i), \;\; \beta > 0.$$

Dados os n pares (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$, o objetivo da análise é obter o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de β, digamos $\hat{\beta}$, e então usá-lo para fazer inferências sobre β.

(a) [0,7] Prove que o EMV de β satisfaz a equação

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i y_i (1+\hat{\beta} x_i)^{-1}}.$$

(b) [0,8] Use a teoria de máxima verossimilhança para provar que a variância assintótica de $\hat{\beta}$ é

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2}{\sum_{i=1}^n (1+\beta x_i)^{-1}}.$$

(c) [1,0] Para testar $H_0 : \beta = 1$ contra $H_1 : \beta > 1$, considere a seguinte estatística de teste

$$T = \frac{\hat{\beta}-1}{\sqrt{Var_0(\hat{\beta})}},$$

em que

$$Var_0(\hat{\beta}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (1+x_i)^{-1}},$$

isto é, a variância de $\hat{\beta}$ quando H_0 é verdade.
Assumindo que

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{Var(\hat{\beta})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$

para n grande, com a $Var(\hat{\beta})$ dada em (b), e usando os dados abaixo, calcule o poder aproximado do teste T para rejeitar $H_0 : \beta = 1$ quando $\alpha = 0,025$ e o verdadeiro valor de β é igual a 1,10.

Dados: Há 50 pacientes com 30 anos de idade e 50 pacientes com 40 anos de idade no início do ensaio clínico.

2. Considere a função densidade

$$f_X(x;\theta) = c^{1/\theta}\theta^{-1}x^{-(1+1/\theta)}I_{(c,\infty)}(x),\ \theta > 0, c > 0.$$

em que θ é um parâmetro desconhecido e c é uma constante conhecida.

   (a) [0,6] Para $r > 0$, encontre $E(X^r)$, indicando para quais valores de r $E(X^r)$ existe.

   (b) [0,6] Para $\theta < 1$, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n da densidade $f_X(x;\theta)$, mostre que

$$\hat{\xi} = \left(\frac{\bar{X} - c}{c}\right), \text{ em que } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

   é um estimador não viciado de $\xi = \theta/(1-\theta)$.

   (c) [0,6] Encontre $Var(\hat{\xi})$, indicando sob quais condições de θ a $Var(\hat{\xi})$ existe.

   (d) [0,7] Encontre uma expressão explícita (como função de ξ) para o Limite inferior de Cramér-Rao (LICR) para a variância de qualquer estimador não viciado de ξ. $\hat{\xi}$ é um estimador não viciado uniformemente de mínima variância (ENVUMV) de ξ?

3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, em que $Y_i \sim N(\beta x_i; \sigma^2)$, x_i é conhecido, $i = 1, \ldots, n$.

   (a) [0,5] Encontre uma estatística suficiente e completa para (β, σ^2).

   (b) [0,6] Quais os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) de β e σ^2?

   (c) [0,6] Mostre que os EMV de β e σ^2 são consistentes em Erro Quadrárico Médio (EQM).

   (d) [0,8] Construa o teste da razão de verossimilhança exato para $H_0 : \beta = 1$ vs. $H_1 : \beta \neq 1$. Justifique todos os seus passos.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma função densidade dada por

$$f(x;\mu,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2\right\} I_{(0,\infty)}(x), \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0,$$

em que $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \mu^3/\lambda$.

(a) [0,5] Mostre que a distribuição de X pertence à família exponencial biparamétrica.

(b) [0,6] Para λ conhecido e n suficientemente grande, encontre um intervalo de confiança (IC) para μ.

(c) [0,7] Para μ conhecido, encontre o estimador de λ pelo método dos momentos.

(d) [0,7] Para μ conhecido, suponha que λ tem distribuição a priori $Gama(\alpha, \beta)$ de média α/β. Encontre o estimador de Bayes considerando a perda quadrática.

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial truncada, com função densidade

$$f(x;\mu,\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\mu)/\beta} I_{[\mu,\infty)}(x), \ \mu \in \mathbb{R}, \beta > 0.$$

(a) [0,5] Encontre uma estatística suficiente para (μ, β).

(b) [0,6] Obtenha o EMV para (μ, β) (não precisa discutir rigorosamente que o EMV é um ponto de máximo).

(c) [0,7] Para β conhecido, encontre o estimador não viciado uniformemente de mínima variância (ENVUMV) para μ.

(d) [0,7] Assuma que μ é conhecido e encontre um teste UMP para as hipóteses $H_0 : \beta = \beta_0$ contra $H_1 : \beta > \beta_0$ com nível de significância α.

Dica: $Y = X - \mu \sim \exp(1/\beta)$.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

11/02/2025

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. **Inicie cada questão em uma nova folha**. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada **(use apenas um lado da folha, não use frente e verso)**.

4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente no canto superior esquerdo. Responda mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

5. Tranquilidade e Boa Prova!

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória (a.a.) de uma distribuição de Poisson com parâmetro λ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x), \ \ \lambda > 0$$

Defina $\pi = P(X \leq 1) = (1 + \lambda)e^{-\lambda}$.

(a) [0,6] Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para λ.

(b) [0,5] Mostre que $I_{\{X_i \leq 1\}}$ é um estimador não viciado de π, em que $I_{\{A\}}$ é a função indicadora do conjunto A.

(c) [0,7] Obtenha um estimador não viciado uniformemente de mínima variância (ENVUMV) de π.

(d) [0,7] Mostre que a estatística obtida em (c) é uma função de T e é de fato um estimador não viciado de π.

2. Espécimes de um novo plástico de alto impacto são testados batendo-os repetidamente com um martelo até que se quebrem. Se cada espécime tem uma probabilidade constante θ de sobreviver a um golpe, independentemente do número de golpes previamente recebidos, o número de golpes X necessários até que a espécime se quebre tem distribuição geométrica

$$P(x;\theta) = (1-\theta)\theta^{x-1} I_{\{1,2,\dots\}}(x).$$

Suponha que os resultados dos testes de $n = 200$ espécimes são:

Número de golpes x necessários	1	2	3	≥ 4	TOTAL
Número de espécimes quebradas após x golpes	112	36	22	30	200

(a) [0,7] Encontre o Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de θ para uma amostra de n espécimes.

(b) [0,5] Qual a estimativa de θ de acordo com os dados acima?

(c) [0,7] Mostre que a Informação de Fisher para θ é dada por

$$I(\theta) = n\left(\frac{\theta^2+\theta+1}{\theta(1-\theta)}\right)$$

(d) [0,6] Desenvolva um intervalo de confiança apropriado de 95% de confiança para θ e use a estimativa de θ para achar uma estimativa para esse intervalo.
Dica: Use a teoria assintótica dos EMV.

3. Suponha que um sistema tem duas componentes, cujos tempos de vida (digamos, X e Y) são independentes, cada um com distribuição exponencial com média θ, ou seja,

$$f(x;\theta) = (1/\theta)e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x),\ \theta > 0.$$

O sistema falha assim que pelo menos uma de suas componentes falhe. Seja Z o tempo de vida do sistema.

(a) [0,5] Qual a função densidade de probabilidade de Z?

(b) [0,7] Para $n(\geq 1)$ sistemas do mesmo tipo, sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ os respectivos tempos de vida. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ (digamos, $\hat{\theta}_n$) baseado em $Z_1, \ldots, Z_n$.

(c) [0,6] Obtenha a $E(\hat{\theta}_n)$ e $Var(\hat{\theta}_n)$.

(d) [0,7] Compare a $Var(\hat{\theta}_n)$ com o LICR (limite inferior de Cramer-Rao) e comente sobre a eficiência e suficiência de $\hat{\theta}_n$.

4. Seja $X_1, \cdots, X_n$ um a.a. de uma variável aleatória (v.a.) com função distribuição de probabilidade (f.d.p.) dada por

$$f(x \mid \theta) = \frac{3x^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) [0,5] Baseado em uma amostra de tamanho n, obtenha o EMV de $\tau(\theta) = \theta^2 + 1$.

(b) [0,6] O estimador de θ, obtido pelo método dos momentos, é consistente?

(c) [0,7] Determine um ENVUMV para $\tau(\theta) = 3\theta$. Justifique.

(d) [0,7] Suponha que θ tenha distribuição a priori $Gama(4, 1)$ e assuma que $n = 1$. Determine o estimador de Bayes para θ, considerando a função de perda quadrática.

5. É realizado um experimento para comparar 2 tipos de drogas para o tratamento de uma certa doença. A droga do tipo A é ministrada em n pacientes e a droga do tipo B em m pacientes. Os resultados podem ser considerados como sendo duas amostras aleatórias independentes $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ de duas populações exponenciais de parâmetros θ_1 e θ_2 (que são as medias da distribuições), respectivamente. Suponha n e m grandes quando for necessário:

   (a) [0,5] Para $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, determine a estatística suficiente para θ.

   (b) [0,6] Se $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, encontre um IC para θ, justifique.

   (c) [0,7] Obtenha um ENVUMV para $\tau(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 + \theta_2$. Justifique.

   (d) [0,7] Obtenha a estatística da razão de verossimilhanças (Q_{RV}) para testar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$, supondo que $n = m$.