Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Parte de Probabilidade
22 de janeiro de 2024

Instruções:

1. Leia atentamente as questões.

2. A prova é composta de 4 questões, que devem ser respondidas de forma clara, completa e detalhada.

3. A duração da prova é de 3 horas.

4. Não é permitido consulta.

5. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Exercício 1: [*25 pts.*] Seja X uma variável aleatória integrável. Prove que

$$n\,P(|X| > n) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Dica: Estude $E(|X|\, I_{\{|X|>n\}})$.

Exercício 2: [*25 pts.*] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes, com $X_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$, $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$. Demonstre que:

(a) [*12 pts.*] Se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ quase certamente.

(b) [*13 pts.*] Se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ quase certamente.

Dica: No item (b), defina $Y_n = \exp\{-\sum_{j=1}^{n} X_j\}$ para $n \geq 1$, e calcule $E(Y_n)$. Use que se $a_j \geq 0$ para qualquer $j \geq 1$, então

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + a_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \forall\, n \geq 1.$$

Exercício 3: [*25 pts.*] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tais que

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2},\ n \geq 1.$$

(a) [*6 pts.*] Mostre que a função característica de X_n é dada por:

$$\phi_{X_n}(t) = \cos t,\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) [*6 pts.*] Considere uma variável aleatória Y com distribuição uniforme no intervalo $(-1, 1)$. Prove que a função característica de Y é dada por:

$$\phi_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t \neq 0, \\ 1 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

(c) [*6 pts.*] Demonstre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$ converge quase certamente.

(d) [*7 pts.*] Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$ tem distribuição uniforme no intervalo $(-1, 1)$.

Dica: No item (d), use que para qualquer $t \neq 0$,

$$\cos(t/2) = \frac{\operatorname{sen} t}{2\,\operatorname{sen}(t/2)}.$$

Exercício 4: [*25 pts.*] **Princípio da Substituição:** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável tal que $E|\varphi(X,Y)| < \infty$. Definimos

$$g(y) = E(\varphi(X,y)) = \int \varphi(x,y)\, dP_X(x),\ y \in \mathbb{R},$$

onde P_X denota a distribuição de X. Prove que

$$E(\varphi(X,Y) \,|\, Y) = g(Y) \text{ q.c.}$$

Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Parte de Inferência
24 de janeiro de 2024

Instruções:

1. Leia atentamente as questões.

2. Você deve escolher quatro questões, dentre as cinco, para entregar. Somente quatro questões serão corrigidas.

3. Todas as questões têm peso igual, correspondendo a 25 pontos.

4. Cada questão deve ser respondida de forma clara, completa e detalhada.

5. A duração da prova é de 3 horas.

6. Não é permitido consulta.

7. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Exercício 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas proveniente da distribuição Uniforme contínua no intervalo $(0,\theta), \theta > 0$. Considere θ como uma variável aleatória cuja densidade é dada pela equação (1)

$$\pi(\theta) = ba^b\theta^{-(b+1)}\mathbf{1}_{(a,\infty)}(\theta), \tag{1}$$

sendo a e b hiperparâmetros conhecidos, onde $a > 0$, $b > 0$ e $\mathbf{1}_A(\cdot)$ é a função indicadora do conjunto A.

(a) [*5 pts.*] Identifique o estimador não viciado de variância uniformemente mínima (ENVUMV) para θ. Justifique.

(b) [*8 pts.*] Compute a distribuição à posteriori para θ dada a amostra X_1,....,X_n.

(c) [*5 pts.*] Identifique o estimador Bayesiano para θ, sob perda quadrática.

(d) [*7 pts.*] Compare os estimadores obtidos nos itens (a) e (c) em termos de, pelo menos, dois critérios (propriedades).

Exercício 2: Suponha que $n \geq 2$, $\quad \theta > 0$, $\quad j = 1, 2$ e sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\theta^2}\Big), & j = 1 \\ \frac{1}{2\theta} \exp\Big(-\frac{|x|}{\theta}\Big), & j = 2. \end{cases}$$

(a) [*5 pts.*] Obtenha a expressão analítica da função de verossimilhança de $(\theta$,$j)$ baseada na amostra $X_1, \ldots$,X_n.

(b) [*10 pts.*] Identifique o estimador de máxima verossimilhança de (θ, j).

(c) [*10 pts.*] Considere que a amostra é obtida sob $j = 1$ e seja $\hat{\theta}_n$ o estimador de máxima verossimilhança. Mostre que esse estimador é consistente: $\hat{\theta}_n \rightarrow_P \theta$, quando $n \rightarrow \infty$.

Exercício 3: Considere um experimento com n ensaios IID onde, em cada ensaio obtemos somente um resultado de k categorias possíveis. Seja $X_i = j$ se o i-ésimo ensaio produz o j-ésimo resultado e seja $\theta_j = P(X_i = j)$ a probabilidade associada a esse resultado. Considere $n \geq k-1$. Seja $N_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i=j]}$ o número de observações na j-ésima categoria, com $j = 1, \ldots, k$ e sendo $\mathbf{1}_A$ a função indicadora do conjunto A.

(a) [*13 pts.*] Interessa testar a hipótese $H_0 : \theta_j = \theta_{0j}$ para $j = 1, \ldots, (k-1)$ onde $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0,(k-1)}$ são constantes especificadas. Encontre o teste de Wald e sua distribuição assintótica.

(b) [*12 pts.*] Considere $k = 5$. Interessa testar a hipótese

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \quad \text{e} \quad \theta_4 = \theta_5$$

versus $H_1 : H_0$ não é verdadeira. Encontre o teste de Razão de Verossimilhança e sua distribuição assintótica.

Exercício 4: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma seqûencia de variáveis aleatórias IID tal que a densidade de X_i com respeito à medida de Lebesgue é Gama(α, β):

$$f(x_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x_i^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x_i}{\beta}\right) \quad x_i \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

onde α é conhecido.

(a) [*18 pts.*] Encontre o UMVUE de $1/\beta$ com base na amostra $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

(b) [*7 pts.*] Seja a densidade a priori $\pi(\beta)$ definida como:

$$\pi(\beta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)\beta^{a+1}} \exp\left(-\frac{b}{\beta}\right) \quad \beta \geq 0,$$

onde a e b são hiperparâmetros tais que $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o estimador Bayesiano de $1/\beta$ sob perda quadrática.

Dica: $E(x_i) = \alpha\beta$, $\quad Var(x_i) = \alpha\beta^2$ e a função geradora de momentos é $M_{x_i}(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$ para $t < \beta^{-1}$.

Exercício 5: (a) [*12 pts.*] Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma seqûencia de variáveis aleatórias IID tal que $X_i \sim N(\theta,\theta)$ com $\theta > 0$. Encontre uma quantidade pivotal e use-a para construir um intervalo de confiança para θ.

(b) [*13 pts.*] Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma seqûencia de variáveis aleatórias IID tal que $X_i \sim N(\theta,\theta^2)$ com $\theta > 0$. Considere a estatística $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$. Discuta se essa estatística é suficiente e/ou completa.