ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 02/09/2022

Questão 1. Considere o modelo presa-predador

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax\left(1-\frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy \end{cases}. \tag{1}$$

(a) Identifique as variáveis x e y (qual é presa e qual é predador). Em seguida, decida se é possível dizer que há auto-inibição em alguma das espécies. Se sim, em qual?

A variável x representa a presa, uma vez que sua população diminui ao ter contato com y. Por sua vez, y representa o predador, que se beneficia com o contato com x.

É possível dizer que há auto-inibição na população das presas, pois seu crescimento é dado pela equação logística (de Verhulst). Essa equação indica competição entre a própria espécie, de forma que seu crescimento seja limitado por uma capacidade de suporte K na ausência de predadores. Isto é, mesmo no cenário livre de predadores, o crescimento do número de presas não é indefinido, pois há auto-inibição.

(b) Interprete cada um dos parâmetros a, b, K, α e β.

O parâmetro a é a taxa de crescimento populacional das presas, enquanto b é a taxa de mortalidade da população de predadores.

O parâmetro K é a capacidade de suporte que limita o crescimento de presas, desde que se $x > K$ então $1 - \frac{x}{K} < 0$, o que implicaria em $\frac{dx}{dt} < 0$.

O parâmetro α representa a taxa de predação ou taxa de decaimento da população de presas devido a encontros com predadores. O parâmetro β é a taxa de conversão da caça em novos predadores.

(c) Determine os equilíbrios de (1) e o tipo de estabilidade, em função dos parâmetros.

Analisando o cenário $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, vemos primeiramente que um ponto de equilíbrio é dado por $P_1 = (0,0)$. Neste cenário, $x = 0 \Rightarrow y = 0$, mas o contrário não é válido. Se $y = 0$, temos $ax\left(1-\frac{x}{K}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = K$. Portanto, $P_2 = (K, 0)$ é outro ponto de equilíbrio. Por fim, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, temos

$$\left(1-\frac{x}{K}\right) = \alpha xy \qquad \text{e} \qquad by = \beta xy.$$

Portanto, um último ponto de equilíbrio é dado por $P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\left(1-\frac{b}{\beta K}\right)\right)$.

Para analisar a estabilidade dos pontos P_1, P_2 e P_3 vamos encontrar a matriz Jacobiana do sistema (1), através das derivadas parciais de suas equações:

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} a\left(1-\frac{2x}{K}\right) - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b+\beta x \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Aplicando essa matriz no ponto P_1 obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \tag{3}$$

para a qual temos os autovalores $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. Portanto, P_1 é ponto de sela.

Aplicando no ponto P_2 obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} -a & -\alpha K \\ 0 & \beta K - b \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Os autovalores de B são $\lambda_1 = -a < 0$ e $\lambda_2 = \beta K - b$. Se $K > \frac{b}{\beta}$, temos $\lambda_2 > 0$ e, por outro lado, se $K < \frac{b}{\beta}$, temos $\lambda_2 < 0$. Portanto, se $K > \frac{b}{\beta}$, P_2 é ponto de sela e, se $K < \frac{b}{\beta}$, P_2 é nó estável.

Por fim, aplicando no ponto P_3, temos:

$$C = \begin{bmatrix} -\dfrac{ab}{\beta K} & -\dfrac{-\alpha b}{\beta} \\ \dfrac{a}{\alpha K}[\beta K - b] & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Como $a, b, \beta, K > 0$, temos que $\text{tr}(C) = -\frac{ab}{\beta K} < 0$. Além disso, $\det(C) = \frac{ab}{\beta K}[\beta K - b]$. Então, se $K > \frac{b}{\beta}$, temos $\det(C) > 0$ e, se $K < \frac{b}{\beta}$, temos $\det(C) < 0$. E mais, se $K < \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$, então ocorre $[\text{tr}(C)]^2 < 4\det(C)$. Portanto, P_3 é:

- Ponto de sela, se $K < \frac{b}{\beta}$; $(\text{tr}(C) < 0$ e $\det(C) < 0)$
- Nó estável, se $K > \frac{b}{\beta}$ e $K \geq \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$; $(\text{tr}(C) < 0$, $\det(C) > 0$ e $[\text{tr}(C)]^2 \geq 4\det(C))$
- Espiral estável, se $K > \frac{b}{\beta}$ e $K < \frac{ab}{4\beta(\beta K - b)}$. $(\text{tr}(C) < 0$, $\det(C) > 0$ e $[\text{tr}(C)]^2 < 4\det(C))$

Questão 2.

(a) Reescreva o modelo (1) (Questão 1) supondo que haja retiradas (pesca) do tipo Malthusiano. Adote ϵ_1 e ϵ_2 para as taxas de retirada.

É possível reescrever (1) nessas condições da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - \epsilon_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy - \epsilon_2 y \end{cases}. \tag{6}$$

(b) Com algumas manipulações matemáticas, reescreva o modelo obtido em (a) de modo que o mesmo fique na forma de (1). Em seguida, interprete a influência da pesca nos parâmetros do modelo original (1).

Podemos reescrever (6) como abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= (a-\epsilon_1)x\left(1-\dfrac{x}{\left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)K}\right)-\alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -(b+\epsilon_2)y+\beta xy \end{cases}. \tag{7}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} ax\left(1-\frac{x}{K}\right)-\alpha xy-\epsilon_1 x &= ax-\epsilon_1 x - a\frac{x^2}{K}-\alpha xy \\ &= (a-\epsilon_1)x - a\frac{x^2(a-\epsilon_1)}{K(a-\epsilon_1)}-\alpha xy \\ &= (a-\epsilon_1)x\left(1-\frac{x}{K\left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)}\right)-\alpha xy. \end{aligned}$$

Com essa nova formulação podemos ver a influência da pesca na dinâmica do modelo original: como $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, vemos que a taxa de crescimento de presas diminui ao passo que a taxa de mortalidade de predadores aumenta. Além disso, a nova capacidade de suporte da população de presas passa a ser $\left(\frac{a-\epsilon_1}{a}\right)K$, que é igual a capacidade de suporte original (K) se não há pesca ($\epsilon_1 = 0$) e tanto menor que K quanto maior for ϵ_1.

(c) É possível dizer se o efeito da pesca favorece alguma das espécies? Justifique sua resposta.

De forma análoga ao item (c), no caso sem pesca, podemos agora encontrar os seguintes pontos de equilíbrio não triviais: $Q_1 = (\frac{a-\epsilon_1}{a}K, 0)$ e $Q_2 = \left(\dfrac{b+\epsilon_2}{\beta}, \dfrac{a-\epsilon_1}{\alpha}\left(1-\dfrac{b+\epsilon_2}{\beta K}\right)\right)$.

Se ocorre Q_1 a população de predadores é extinta, o que não é do nosso interesse. Analisando Q_2, se comparamos com o cenário do modelo original, vemos que a pesca favorece a população de presas, já que $\dfrac{b+\epsilon_2}{\beta} > \dfrac{b}{\beta}$ e $\dfrac{a-\epsilon_1}{\alpha}\left(1-\dfrac{b+\epsilon_2}{\beta K}\right) < \dfrac{a}{\alpha}\left(1-\dfrac{b}{\beta K}\right)$.

Questão 3. Na literatura sobre COVID-19, é possível saber que a dinâmica da mesma se dá a partir de contatos entre suscetível e infectado (a uma taxa de contágio β) e, após alguns dias, o indivíduo infectado se recupera (a uma taxa γ), por um curto período. Pede-se:

(a) Dentre os modelos clássicos, SI, SIS e SIR, qual se adequa melhor para estudar a dinâmica da COVID-19?

Dentre as opções apresentadas, o modelo epidemiológico mais adequado para estudar a dinâmica da COVID-19 é o modelo SIR, uma vez que o indivíduo após se infectar pode se recuperar e permanecer recuperado por um curto período, não retonando imediatamente ao compartimento de indivíduos suscetíveis.

(b) Escreva um sistema de equações diferenciais para estudar a dinâmica da COVID-19.

O sistema de equações diferenciais do modelo SIR é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = & -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} & = & \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} & = & \gamma I(t) \end{cases}, \tag{8}$$

onde S, I e R são funções de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente, com relação ao tempo t. Além disso, $\beta > 0$ é a taxa de contágio e $\gamma > 0$ é a taxa de recuperação

(c) Se o tempo de contágio é em torno de 10 dias, qual uma estimativa para a taxa de recuperação?

Sabe-se que no modelo SIR o tempo em que uma pessoa permanece infectada é inversamente proporcional à taxa de recuperação. Portanto, $\gamma = \frac{1}{10} = 0,1$.

Questão 4. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} & = & -\frac{\beta}{p+(1-p)(s(t)+i(t)-s(t)i(t))} s(t)i(t) \\ \frac{di}{dt} & = & \frac{\beta}{p+(1-p)(s(t)+i(t)-s(t)i(t))} s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt} & = & \gamma i(t) \end{cases}, \tag{9}$$

onde s, i e r estão em proporção, isto é, $s, i, r \in [0, 1]$ e $p \geq 1$.

(a) Para $p = 1$ observe que o modelo (9) coincide com o modelo SIR clássico.

De fato, quando $p = 1$ temos que

$$p + (1-p)(s(t) + i(t) - s(t)i(t)) = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\beta s(t)i(t)}{p + (1-p)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))} = \beta s(t)i(t).$$

Assim, para $p = 1$ os modelos (8) e (9) são iguais.

(b) Verifique que o contágio entre suscetíveis e infectados é enfraquecido à medida que p aumenta.

Suponha que $p_1, p_2 \geq 1$ são tais que $p_1 < p_2$. Devemos mostrar que, para todo $t > 0$,

$$\frac{\beta s(t)i(t)}{p_1 + (1-p_1)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))} \geq \frac{\beta s(t)i(t)}{p_2 + (1-p_2)(s(t) + i(t) - s(t)i(t))}.$$

Seja $q = s(t) + i(t) - s(t)i(t)$. Queremos mostrar que

$$p_1 + (1-p_1)q \leq p_2 + (1-p_2)q.$$

Demonstração. Como $s, i \in [0,1]$, note que $q \geq 0$, desde que

$$s(t)i(t) \leq s(t) \leq s(t) + i(t).$$

Mais ainda, note que $q \leq 1$, pois

$$q = s(t)(1 - i(t)) + i(t) \leq (1 - i(t)) + i(t) = 1.$$

Assim, como $p_2 - p_1 > 0$,

$$\begin{aligned} q \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (p_2 - p_1)q \leq p_2 - p_1 \\ &\Leftrightarrow \quad ((1 - p_1) - (1 - p_2))q \leq p_2 - p_1 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 - p_1)q \leq p_2 - p_1 + (1 - p_2)q \\ &\Leftrightarrow \quad p_1 + (1 - p_1)q \leq p_2 + (1 - p_2)q. \end{aligned}$$

$\square$

(c) Interprete p quanto à isolamento social.

Como vimos no item anterior, à medida que p aumenta, o contágio entre suscetíveis e infectados é enfraquecido. Isto é, a partir de p podemos analisar e buscar diminuir a chance de contágio. Sendo assim, este parâmetro pode estar associado às medidas de controle para COVID-19, como o isolamento social.

Boa Prova!