MM 427, Álgebra Comutativa
Exame de Qualificação ao Doutorado

Fevereiro de 2024

1. Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F), demonstrando as verdadeiras e dando um contra-exemplo para as falsas. **Classificação sem justificativa não será considerada.**

   (a) (1 pt.) Seja $\mathfrak{R}$ o radical de Jacobson de um anel não trivial A, e $x \in A$. Então $x \in \mathfrak{R}$ se, e somente se, $1 - xy$ é invertivel em A, para todo $y \in A$.

   (b) (1 pt.) Seja A um anel booleano (isto é, tal que $x^2 = x$, para todo $x \in A$). Então existe $x \in$ tal que $2x \neq 0$.

   (c) (1 pt.) Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $MCD(m, n) = 1$. Então $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$.

   (d) (1. pt) No anel de polinômios $\mathbb{Z}[x]$, considere o ideal maximal $\mathfrak{m} = (2, x)$. Então o ideal $(4, x)$ é uma potência de $\mathfrak{m}$.

2. (1,5 pt.)Seja B um domínio integral, e K seu corpo de frações. Se B é um anel de avaliação de K, então valem as seguintes afirmações:

   i) B é um anel local.

   ii) B é integralmente fechado em K.

3. (1,5 pt) Seja $A \neq 0$ um anel; então A é Artiniano se, e somente se, A é Noetheriano e $\dim(A) = 0$.

4. (3 pt.) Seja A um anel tal que

   a) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, o anel local $A_{\mathfrak{m}}$ é Noetheriano;

   b) para todo $x \neq 0$ em A, o conjunto dos ideais maximais de A contendo x é finito.

   Prove que A é Noetheriano.