MT401 - Exame de qualificação

Prof. Christian Rodrigues

Prof. João Pitelli

05 de abril de 2021

- **Início da prova às 9:00 e término às 13:00 com mais para resolver a prova e mais 20 minutos exclusivos para escanear as resoluções, preparar um ÚNICO arquivo PDF e enviar por email.**
- **A resolução deverá ser escrita em folhas brancas e enumeradas. Deverá conter o nome, RA e sua assinatura em todas as páginas. Questão nova deve ser iniciada em página nova.**
- **As respostas da prova devem ser escritas em caneta esferográfica azul ou preta, em lápis ou grafite, mas a apresentação da prova depois de digitalizada deve estar legível, caso contrário o professor não irá corrigir a mesma.**
- **A resolução deve ser digitalizada em um único arquivo PDF. Para tal o aluno pode usar um scanner (qualquer tipo, e.g., um celular) à sua disposição. Existem vários aplicativos para digitalizar documentos que podem ser instalados em celular, tais como, Tiny Scanner, CamScanner e Tap Scanner.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Boa prova!

Q1. Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n) \subset X$. Mostre que se $d(x_{n+1}, x_n) < ac^n$ com $a > 0$ e $0 < c < 1$, então (x_n) é Cauchy. Uma sequência que decresce a uma taxa $d(x_{n+1}, x_n) \leq 1/n$ é, necessariamente, Cauchy? Justifique.

Q2. Seja $1 \leq p < \infty$.

a) Prove que a expressão

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é uma norma no espaço vetorial das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

b) Mostre que o espaço normado do item (a) **não** é de Banach.

Q3. Seja $C([a, b])$. Fixe $t_1, \ldots t_n \in [a, b]$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e defina $\delta_{t_1,\ldots,t_n}^{c_1,\ldots,c_n} : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta_{t_1,\ldots,t_n}^{c_1,\ldots,c_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i).$$

Mostre que $\delta_{t_1,\ldots,t_n}^{c_1,\ldots,c_n}$ é um funcional linear limitado. Encontre a norma de δ_t^c, com $t \in [a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$.

Q4. Considere o conjunto

$$cs = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ converge} \right\},$$

munido da norma $||(a_j)_{j=1}^{j=\infty}|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right|$. Prove que cs é isomorfo isometricamente ao espaço das sequências convergentes

$$c = \left\{ (a_j)_{j=1}^{j=\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j \to \infty} a_j \text{ existe em } \mathbb{K} \right\}.$$

Q5. Prove que,

a) para $p \neq 2$, l_p **não** é um espaço com produto interno.

b) Se (e_k) for uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno X, então que para quaisquer $x, y \in X$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq ||x|| ||y||.$$

Q6. Mostre que se f for uma função C^3 real em um intervalo $[a,b]$ e, se $\xi \in (a,b)$ é um zero simples de f, então o algoritmo

$$x_{n+1} = Tx_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

possui um ponto fixo em alguma vizinhança de ξ.

Exame de qualificação Matrizes 07/04/2021

1. Descreva o método de decomposição LU da matriz quadrada A sem pivoteamento e enuncie as condições de existência da decomposição. Enuncie também as condições de existência da decomposição LU com pivoteamento parcial.

2. Considere as matrizes de posto completo A e B, $m \times n$ com $m \geq n$. É possível mostrar que se A e B tem a mesma imagem, então $B^t Ax = B^t b$ fornece a solução do problema de quadrados mínimos $Ax = b$. Obtenha a solução do problema de quadrados mínimos escolhendo a matriz B conveniente para:
   - a construção do sistema de equações normais de $Ax = b$.
   - a decomposição de A via QR.
   - Justifique porque sua escolha de B é válida em ambos itens.

3. Sejam T uma matriz tridiagonal, $n \times n$, R uma matriz triangular superior, $n \times n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica com autovalores: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
   (a) Mostre que TR é Hessenberg.
   (b) Demonstre que λ_i é um número real.
   (c) Considere e o método QR iterativo para estimar os autovalores de A. Descreva este método. Explique a vantagem e/ou necessidade de previamente reduzir A a uma matriz tridiagonal através de transformações ortogonais. Neste caso, explique como realizar esta redução e por que a matriz é reduzida à forma tridiagonal. O resultado do item (a) é importante para este procedimento?

4. Obtenha a decomposição SVD da matriz $C = wz^t$ onde $w : m \times 1$ e $z : n \times 1$ são vetores não nulos.

Exame de Qualificação – DMA/IMECC/UNICAMP
MT403 - Análise Numérica I
12 de abril de 2021

Aluno: **RA:**

Questão 1

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \tag{1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

com os valores $U_0 = \alpha$ e $U_{m+1} = \beta$ prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o termo independente $F \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas $U \in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3).

b) Defina os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para o método (3).

c) Sabendo que os m autovalores da matriz A em (3) são dados por

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left[\cos(p\pi h) - 1\right] \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

mostre que o método (3) é estável e convergente na norma 2, determinando sua ordem.

Questão 2

Seja o o Método BDF2 (Backward Differentiation Formula)

$$3U^{n+2} - 4U^{n+1} + U^n = 2\Delta t f(U^{n+2}). \tag{5}$$

a) Apresente dois algoritmos de predição-correção para a sua resolução que utilizem

a1) Um método de mais baixa ordem no passo preditor.

a2) Um método de mesma ordem no passo preditor.

b) Defina *Estabilidade Zero* de um método linear de passos múltiplos e verifique se o método (5) é zero-estável.

Questão 3

Seja o seguinte problema de valor inicial e de contorno: Dados $a > 0$ e $\kappa > 0$, encontrar $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em} \quad (0,1)\times(0,T) \tag{6}$$

satisfazendo as condições de contorno e iniciais apropriadas.

a) Utilizando uma discretização do domínio $(0,1)$ em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$, uma aproximação do tipo *Upwind para a derivada primeira* e uma aproximação *centrada de segunda ordem para a derivada segunda*, apresente o Método das Linhas (MOL) para o problema acima (sistema de EDOs contínuo no tempo).

b) Defina *Região de Estabilidade Absoluta* de um método linear de passos múltiplos e explique como este conceito pode ser usado para definir um critério de estabilidade para a aproximação do MOL da letra a).

Questão 4

É sabido que a aproximação de Euler explícito no tempo combinada com uma aproximação do tipo Upwind para a derivada no espaço conduz a aproximações condicionalmente estáveis para a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

a) Utilize o método de Von-Neumann para analisar a estabilidade deste esquema, determinando possíveis relações de estabilidade entre $a, \Delta t$ e Δx.

b) Utilize a técnica de sua preferência e analise a estabilidade da versão implícita deste esquema (Euler implícito + Upwind).

Bom exame!

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

MT 520 – TRATAMENTO DE SINAIS DIGITAIS

UNICAMP

EXAME DE QUALIFICAÇÃO 1S/2021

Grupo de Geofísica Computacional

Podem ser consultados livros e anotações. No fim da resolução escreva: **Dou a minha palavra de honra que para fazer este exame não recebi a ajuda de ninguém** e assine.

$\boxed{1}$ Utilize a Série de Fourier para mostrar que para $\theta \in (-\pi, \pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\theta}{2}.$$

Porque a expansão acima não é válida para $|\theta| = \pi$?

$\boxed{2}$ Considere o sinal discreto e real $s = [s_1, s_2, s_3, s_4]$.

(a) Compute a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de s.

(b) Sob que condições sobre s a DFT é real?

$\boxed{3}$ Seja $\Omega > 0$ e considere $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja Transformada de Fourier, $\widehat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é dada por

$$\widehat{u}(\omega) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi|\omega|/\Omega), & |\omega| \leq \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $\widehat{u}$ e determine $u(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Considere a amostra de u, $u_n = u(n\Delta t)$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\Delta t > 0$. Analise a reconstrução do sinal $u(t)$ através do Teorema de Shannon.

(c) Se $\widehat{u}$ for usada como um filtro, qual será a sua atuação?

$\boxed{4}$ Encontre os sinais analíticos de $f : \mathbb{R} \to R$ definidos por:

(a) $f(t) = \operatorname{sinc}(t)$.

(b) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

MT601 Exame de Qualificação

Profs.: Roberto Andreani e Sandra A. Santos Abril/2021

---

1. Considere o problema
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$
com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, e sejam $\{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ direções $\boldsymbol{A}$-conjugadas.

   (a) Prove que as direções $\{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ são linearmente independentes.

   (b) Analise se o problema formulado possui solução, se ela é única, e mostre como usar as direções $\boldsymbol{A}$-conjugadas para determinar $\boldsymbol{x}^*$, solução do problema.

   (c) Dados $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \{1, \ldots, n\}$, considere a variedade afim $\boldsymbol{\mathcal{V}}_p(\boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}_0 + \operatorname{span}\{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_p\}$ e o ponto $\boldsymbol{x}_p$, solução de
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}_p(\boldsymbol{x}_0)} f(\boldsymbol{x}).$$
   Para $p < n$ e $\boldsymbol{x}_{p+1} = \operatorname*{argmin}_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\boldsymbol{x}_p + \lambda\, \boldsymbol{d}_{p+1})$, mostre que $\nabla f(\boldsymbol{x}_{p+1})$ é ortogonal a $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{p+1}(\boldsymbol{x}_0)$.

---

2. Considere o problema de quadrados mínimos
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|_2^2$$
com $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com componentes $g_j \in \mathcal{C}^2$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, e $m < n$.

   (a) Mostre que a matriz Hessiana $\nabla^2 f$ é singular em qualquer solução ótima $\boldsymbol{x}^*$ tal que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

   (b) Considere o caso em que $\boldsymbol{g}$ é função afim, da forma $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ em que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (i) Mostre que o problema admite infinitas soluções ótimas. (ii) Assumindo que as linhas de $\boldsymbol{A}$ são linearmente independentes, mostre que $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{z}$ é uma dessas soluções.

---

3. (a) Mostre que o problema de encontrar o ponto em $\mathbb{R}^3$ que pertence à região $\mathcal{R}$ descrita por
$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2 \end{array}$$
   e cuja distância Euclidiana à origem é mínima pode ser formulado como um problema de programação quadrática.

   (b) Eliminando as variáveis x_1 e x_2, calcule a solução do problema com restrições de igualdade, em que ambas as restrições são ativas.

   (c) A solução obtida em (b) é a solução do problema quadrático do item (a)? Explique.

---

4. Considere o problema de programação não linear

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.a} & \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são funções continuamente diferenciáveis, e a *função de penalização* dada por

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \rho) := f(\boldsymbol{x}) + \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{m} \left[\max\{c_j(\boldsymbol{x}), 0\}\right]^2. \ \ x \in V(x_0)$$

Assumindo que tal função de penalização foi aplicada ao problema

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & 0 \leq x_3 \leq 1 \\ & x_1^3 + x_3 \leq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \end{array}$$

os seguintes resultados foram obtidos:

k	ρ_k	$x_1(\rho_k)$	$x_2(\rho_k)$	$x_3(\rho_k)$
1	1	0.834374	0.834374	-0.454855
2	10	0.728327	0.728327	-0.087928
3	100	0.709560	0.709560	-0.009861
4	1000	0.707356	0.707356	-0.000999

Com base em tais resultados, estime a solução ótima do problema, bem como os multiplicadores de Lagrange, identificando as restrições ativas. Apresente um indicativo para a acurácia da estimativa encontrada.

ALUNO	RA

MT 624 Biomatemática I (Exame de Qualificação) – 12/04/2021

INSTRUÇÕES

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Reações Enzimáticas:

(a) Descreva esquematicamente a *reação enzimática* padrão de Michaelis-Menten explicando o papel de cada componente e em seguida estabeleça as equações dinâmicas que a representam.

(b) Adimensionalize o sistema de equações indicando o significado de cada parâmetro.

(c) Estabeleça as condições para a existência de um regime quase estacionário e faça um esboço gráfico da sua evolução temporal.

Questão 2. Modelo de Compartimentos: Considere o modelo de compartimentos:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= D\left\{\frac{1}{2}x_2 - x_1\right\}, \\
\frac{dx_k}{dt} &= D\left\{\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1}) - x_k\right\}, \quad 1 < k < N, \\
\frac{dx_N}{dt} &= D\left\{\frac{1}{2}x_{N-1} - x_N\right\}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

(a) Interprete estas equações diferenciais como modelo de um processo dinâmico de intercambio entre conteúdos $\{x_k\}$. (Identifique a natureza do processo.)

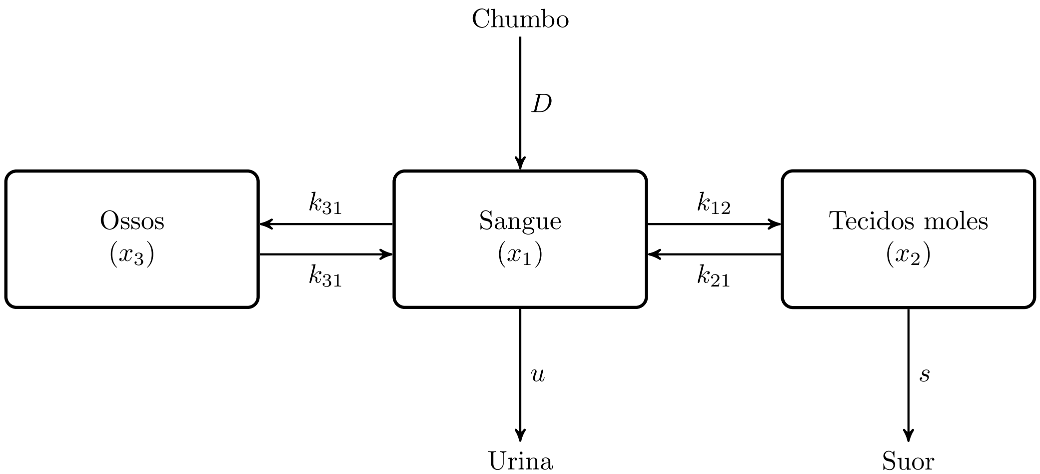
(b) Argumente com base nesta interpretação sobre o comportamento assintótico de $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, isto é, $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t)$.

(c) Escreva este modelo na forma matricial

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

(d) Demonstre matematicamente a sua afirmação do item (b).

Questão 3. Modelagem da cinética do chumbo:



O chumbo, um produto tóxico para os homens e animais, entra pelo corpo principalmente por inalação ou ingestão. Considere uma pessoa que, devido a fatores ambientais, inala ou ingere diariamente uma quantidade D de chumbo. Após entrar no organismo, o chumbo é distribuído pelo corpo passando do sangue para os tecidos moles e ossos, e vice-versa, com taxas constantes conforme ilustrado no diagrama acima. Especificamente, sejam x_1, x_2 e x_3 as concentrações de chumbo no sangue, tecidos moles e ossos, respectivamente. Denote por k_{ij} a taxa de transferência de chumbo do compartimento i para o compartimento j. Por exemplo, k_{12} representa a taxa de transferência de chumbo do sangue para os tecidos moles. Finalmente, o chumbo é excretado na urina e no suor com taxas u e s, respectivamente. Assumindo uma troca linear entre os três compartimentos, apresente um sistema de equações diferenciais lineares que descreve a variação da concentração de chumbo no sangue, tecidos moles e ossos. Explique cada termo das equações diferenciais detalhadamente.

Questão 4. Equação de von Bertalanffy: O peso $p(t)$ de um peixe no instante de tempo t pode ser descrito pela equação de von Bertalanffy

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p, \tag{3}$$

em que $\alpha > 0$ é a constante de anabolismo (transformação de alimentos em substância incorporada nas células) e $\beta > 0$ é a constante de catabolismo (transformação de compostos orgânicos em resíduos com liberação de energia).

(a) Identifique os estados estacionários, caracterizando-os em termos de estabilidade.

(b) O ponto de inflexão t^* de $p(t)$ está associado com a época de desova do peixe. Uma política de pesca consiste em devolver o peixe ao *habitat* quando seu peso é menor que $p^* = p(t^*)$. Determine p^* como função dos parâmetros α e β.

(c) Sabendo que o pacu na fase adulta pesa em média 10,5Kg, mostre que o período de desova ocorre quando o peixe pesa em torno de 3Kg.

Boa Prova!

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
COMBINATÓRIA ENUMERATIVA
12/04/21

Nome: ______________________________________RA:_________________

Resolver 5 dentre as 9 questões dadas abaixo.

1- Calcular a ordem dos elementos do:
(a) grupo de simetrias do quadrado.
(b) grupo de simetrias rotacionais do cubo.

2-Calcule o índice de ciclos dos grupos S_5 e S_6.

3-Quantos padrões diferentes podem ser formados colorindo as arestas de um triângulo usando quatro cores? (Considere apenas simetrias rotacionais.)

4-De quantas formas diferentes os números de 1 a 6 podem ser colocados nas faces de um cubo? (Use o grupo de simetrias rotacionais do cubo.)

5- Falar sobre o "Operador Omega" dando a definição e pelo menos duas aplicações do mesmo.

6-Prove que o número de partições de n nas quais cada parte aparece duas, três ou cinco vezes é igual ao número de partições de n tendo partes congruentes a 2, 3, 6, 9 ou 10 módulo 12.

7-Use o quadrado de Durfee para provar a identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q;q)_n (zq;q)_n} = \frac{1}{(zq;q)_\infty}$$

8-De quantas maneiras diferentes se pode distribuir 14 bolas vermelhas idênticas para 8 pessoas se as 3 primeiras juntas recebem 5 bolas?

9- Obter uma formula para os números de Fibonacci fazendo uso de funções geradoras.

Boa Prova.