MT401 - Exame de qualificação

Prof. Christian Rodrigues
Prof. Yuri Bozhkov

30 de agosto de 2021

- **Início da prova às 9:00 e término às 12:45 com mais para resolver a prova e mais 15 minutos exclusivos para escanear as resoluções, preparar um ÚNICO arquivo PDF e enviar por email.**
- **A resolução deverá ser escrita em folhas brancas e enumeradas. Deverá conter o nome, RA e sua assinatura em todas as páginas. Questão nova deve ser iniciada em página nova.**
- **As respostas da prova devem ser escritas em caneta esferográfica azul ou preta, em lápis ou grafite, mas a apresentação da prova depois de digitalizada deve estar legível, caso contrário o professor não irá corrigir a mesma.**
- **A resolução deve ser digitalizada em um único arquivo PDF. Para tal o aluno pode usar um scanner (qualquer tipo, e.g., um celular) à sua disposição. Existem vários aplicativos para digitalizar documentos que podem ser instalados em celular, tais como, Tiny Scanner, CamScanner e Tap Scanner.**
- **Respostas sem justificativas NÃO serão consideradas.**

Boa prova!

Q1. Considere o espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$, cujos pontos de $\mathbb{R}^n$ são n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ onde cada x_i é um número real. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definimos

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Mostre que d define uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Q2. Considere o conjunto das funções reais contínuas em $[0,1]$.

a) Prove que a correspondência $f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 |f(x)|dt \in \mathbb{R}$ é uma norma em $C[0,1]$.

b) Mostre que esta norma **não** é equivalente à $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Q3. Se E é reflexivo, mostre que E' é reflexivo.

Q4. Mostre que, em um espaço de Hilbert H, convergência de $\sum ||x_j||$ implica convergência de $\sum x_j$.

Q5. Mostre que todo espaço de Hilbert H é isomorfo ao seu bidual $H'' = (H')'$.

MATRIZES - 01/09/21

1. Desenvolva a decomposição LDL^t de uma matriz A simétrica definida positiva de dimensão n. Apresente o método e a contagem de operações de ponto flutuante. Ignore os termos de ordem inferior do polinômio no cálulo das operações.

2. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, posto$(A) = n$. Demonstre que: se $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q^tQ = I$ e $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior, então, $A^\dagger = R^{-1}Q^t$. Relacione esse resultado com a solução do problema de quadrados mínimos através de equações normais.

3. Descreva em detalhe o método das potências inversas.
   Mostre como ele pode ser utilizado para encontrar o autovalor de uma matriz A mais próximo de um dado número α.

4. Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}.$$

   Encontre a relação entre os valores singulares de A e os autovalores de M.

5. Resolva o problema de quadrados mínimos usando a decomposição SVD. Considere os casos em que a matriz A tem posto completo e incompleto.

Exame de Qualificação – DMA/IMECC/UNICAMP
MT403 - Análise Numérica I
3 de Setembro de 2021

Aluno: **RA:**

Questão 1

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \tag{1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

com os valores $U_0 = \alpha$ e $U_{m+1} = \beta$ prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, o termo independente $F \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas $U \in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3).

b) Defina os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para o método (3).

c) Sabendo que os m autovalores da matriz A em (3) são dados por

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}\left[\cos(p\pi h) - 1\right] \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

mostre que o método (3) é estável e convergente na norma 2, determinando sua ordem.

Questão 2

Seja o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$u' = f(u),\ 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta \tag{5}$$

onde $f(u)$ é Lipschitz contínua. Um método linear de r passos para a solução deste PVI pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}) \tag{6}$$

com $\alpha_r = 1$.

a) Qual a condição para que o método (6) seja explícito?

b) Mostre que o método (6) será consistente se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j$$

c) Defina *Estabilidade Zero* para o método linear de passos múltiplos (6).

Questão 3

Defina *stabilidade* $A(\alpha)$ de um método para resolução de EDOs. Quando um método de 1 passo é dito *L-estável*? Mostre que o método BDF1 é *L-estável*, mas o Método do Trapézio não.

Questão 4

Seja o seguinte problema de valor inicial e de contorno: Dado $a > 0$, encontrar $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad (0,1) \times (0,T) \tag{7}$$

satisfazendo as condições de contorno e iniciais apropriadas.

a) Mostre que a aproximação de Euler explícito no tempo combinada com a diferença centrada de segunda ordem para a derivada no espaço conduz a aproximações instáveis para a EDP (7).

b) Apresente um método estável para a resolução numérica da EDP (7), com a respectiva análise de estabilidade para sua solução.

Bom exame!

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

MT 520 – TRATAMENTO DE SINAIS DIGITAIS

EXAME DE QUALIFICAÇÃO 2S/2021

Grupo de Geofísica Computacional

Notação: Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cuja transformada de Fourier é tal que:

(i) $\widehat{f}(-\omega) = \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$;

(ii) $\widehat{f}(\omega) = 0$ para $\omega > \pi$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \widehat{f}(\omega)\, d\omega = \pi \widehat{f}(0)$.

Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 0$.

$\boxed{2}$ Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\Delta t > 0$, considere o sinal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por

$$g(t) = \frac{f(t-\Delta t) + 2f(t) + f(t+\Delta t)}{4}.$$

(a) Determine o filtro convolucional, nos domínios do tempo e da frequência, que gera g a partir de f.

(b) Explique a atuação desse filtro e analise a influência da escolha de Δt.

(c) Exemplifique o item (b) com a aplicação desse filtro ao sinal degrau unitário, $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mu(t) = 0$ se $t < 0$, $\mu(t) = 1/2$ se $t = 0$ e $\mu(t) = 1$ se $t > 0$.

(d) Mostre que se a transformada de Fourier de f é tal que $\widehat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi/\Delta t$, então a atuação desse filtro é idêntica ao do filtro de Hann.

$\boxed{3}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere a sua transformada de Hilbert, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $\widehat{h}(\omega) = -i\, \mathrm{sinal}(\omega) \widehat{f}(\omega)$. Prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, h(t)\, dt = 0.$$

ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 03/09/2021

Questão 1. Utilizando argumentos biológicos plausíveis, obtenha um Modelo Matemático para a seguinte situação descrita por Malthus: "A população humana cresce a uma proporção geométrica enquanto a quantidade de alimento é produzida a uma taxa aritmética"

Questão 2. Suponha que a população de uma certa espécie seja descrita pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = a(x)x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(a) Que tipo de hipóteses deve-se impor sobre $a(x)$ para que a solução do sistema acima descreva uma dinâmica dinâmica populacional com auto-inibição? Justifique sua resposta.

(b) Assumindo $a(x) = r(k - x)$, $r, k > 0$. Descreva um fenômeno biológico de dinâmica populacional que possa ser descrito por este modelo argumentando sobre o significado de cada termo e parâmetro.

(c) Assumindo $a(x) = r(k - x)$, $r, k > 0$. Analíse os pontos estacionários e suas estabilidades.

(d) Assumindo $a(x) = r(k-x)$, $r, k > 0$. Determinne e analise o fenômeno de bifurcação neste modelo.

Questão 3. Suponha que se deseje estudar a aplicação de um dado fármaco x em um indivíduo. Suponha ainda que, após a aplicação, o fármaco atinge primeiro um certo grupo de órgãos. Esse primeiro grupo absorve e elimina parte da concentração do fármaco e uma fração do mesmo é transferida para um outro grupo de órgãos (que é o alvo do tratamento). Essa situação pode ser descrita pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1' &= -\mu_1 x_1 - \lambda x_1 \\ x_2' &= \lambda x_1 - \mu_2 x_2 \end{cases} . \tag{1}$$

onde os parâmetros são todos positivos e x_1 e x_2 correspondem as concentrações do fármaco no primeiro e segundo grupo de órgãos, respectivamente.

(a) Interprete biologicamente cada parâmetro do sistema.

(b) Supondo que $\lambda + \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, determine a solução geral desse sistema.

(c) Supondo que $\mu_1 = \mu_2$, determine a meia vida do fármaco e o tempo médio que ele permanece no organismo.

(d) Suponha que $\mu_1 = \mu_2$. Para o tratamento pretende-se aplicar uma concentração c do fármaco a cada intervalo de tempo T. Sabendo-se que o nível de saturação para o efeito desejado é K, determine o intervalo de aplicação T que se deve ser adotado.

Boa Prova!

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
COMBINATÓRIA ENUMERATIVA
12/04/21

Nome: ____RA:__________________

Resolver 5 dentre as 9 questões dadas abaixo.

1- Calcular a ordem dos elementos do:
(a) grupo de simetrias do quadrado.
(b) grupo de simetrias rotacionais do cubo.

2-Calcule o índice de ciclos dos grupos S_5 e S_6.

3-Quantos padrões diferentes podem ser formados colorindo as arestas de um triângulo usando quatro cores? (Considere apenas simetrias rotacionais.)

4-De quantas formas diferentes os números de 1 a 6 podem ser colocados nas faces de um cubo? (Use o grupo de simetrias rotacionais do cubo.)

5- Falar sobre o "Operador Omega" dando a definição e pelo menos duas aplicações do mesmo.

6-Prove que o número de partições de n nas quais cada parte aparece duas, três ou cinco vezes é igual ao número de partições de n tendo partes congruentes a 2, 3, 6, 9 ou 10 módulo 12.

7-Use o quadrado de Durfee para provar a identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q;q)_n (zq;q)_n} = \frac{1}{(zq;q)_\infty}$$

8-De quantas maneiras diferentes se pode distribuir 14 bolas vermelhas idênticas para 8 pessoas se as 3 primeiras juntas recebem 5 bolas?

9- Obter uma formula para os números de Fibonacci fazendo uso de funções geradoras.

Boa Prova.