Exame de Bolsas 2022

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

12 de dezembro de 2022

Código de Identificação: ______________________________

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Q6	
Q7	
Q8	
Total	

- Desligue o celular.
- **NÃO** retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação.
- A prova tem duração de quatro horas.
- Respostas sem justificativas **NÃO** serão consideradas.

Boa prova!

Q1. O plano $4x + 9y + z = 0$ intercepta o parabolóide elíptico $z = 2x^2 + 3y^2$ em uma elípse. Determine os pontos mais alto e mais baixo nessa elípse.

Q2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

a) Em quais pontos do domínio a função f é contínua?

b) Em quais pontos do domínio a função f é diferenciável?

Q3. Definimos a exponencial de uma matriz real A, $n \times n$ por

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{1}$$

com a convenção de que $e^0 = I_n$. Mostre que a série de potências (1) é convergente para qualquer A.

Q4. Considere a equação diferencial ordinária

$$(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0 \tag{2}$$

a) Mostre que $x = 0$ é um ponto ordinário para (2).

b) Determine a fórmula de recorrência da solução em série de (2).

c) Determine a fórmula para o coeficiente geral da solução de (2).

d) Encontre a solução por série de potências de (2) em termos de $x = 0$, dado que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

Q5. Considere o sistema linear:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ & - & 2y & + & bz & = & a \end{array} \right. .$$

Determine os valores de a e b de modo que S tenha:

a) Solução única.

b) Infinitas soluções.

c) Nenhuma solução.

Q6. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Obter $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Verifique se o operador definido em *a)* é injetor. Podemos afirmar que ele é sobrejetor? Justifique.

Q7. Uma matriz A, de ordem n, é dita ortogonal quando $AA^t = I_n$. Mostre que $det A = \pm 1$ sempre que A for ortogonal.

Q8. Seja $P_2(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a dois. Considere o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dado por

$$Tp(x) = p(x) + (1 + x)p'(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine os autovalores de T.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho