Questão 1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Considere $\mathbb{W}$, o conjunto solução do sistema linear.

(a) Que condições devemos impor a a, b e c para que $\mathbb{W}$ seja subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

(b) Nas condições determinadas em (a) encontre uma base para $\mathbb{W}$.

Questão 2. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mostre que:

(a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são linearmente independentes.

(b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são linearmente independentes.

Questão 3. Seja V um espaço vetorial com base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ e seja $T : V \to V$ uma transformação linear dada por:
$T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_1$.
Faça o que se pede:

(a) Encontre o polinômio minimal de T.

(b) Podemos afirmar que T é diagonalizável?

Questão 4. Verifique se cada informação que se segue é falsa ou verdadeira.
Se verdadeira, demonstre-a e se falsa, dê um contra-exemplo.
Em todos os itens considere A uma matriz quadrada.

(a) Se o polinômio característico de A possui todas as raízes com multiplicidade algébrica igual a 1 então A é diagonalizável.

(b) Se v é autovetor de A associado ao autovalor λ então v também será autovetor de A^n associado ao autovalor λ^n.

(c) Se o polinômio característico de A é $p_T(\lambda) = \lambda^2 + 1$, então A não possui autovalores.

(d) O operador identidade $I(v) = v$ sobre qualquer espaço vetorial V possui 1 como único autovalor.

Questão 5. Considere a parábola $y = x^2$ e a reta $x - y = 1$.

a) Verifique se a reta intercepta a parábola;

b) Determine as coordenadas do ponto da reta mais próximo da parábola.

Questão 6.

a) Mostre que se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua então f tem um ponto fixo, isto é, existe $\bar{x} \in [0, 1]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1) \to [0, 1]$ sem ponto fixo.

Questão 7. Considere a função dada pela série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

Pede-se:

a) O raio de convergência (R) da série;

b) O domínio da função $f(x)$.

Questão 8. Utilize um polinômio de Taylor de ordem 3 da função $\operatorname{sen}(x)$ para encontrar uma aproximação da raíz não nula da equação $x^2 = \operatorname{sen}(x)$.