Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Bolsas 2021

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas com mais 20 minutos para entrega. **Justifique** *todos os argumentos. Respostas sem justificativas* **não** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Questão 1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes **similares**, isto é, existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AS = SB$. Prove que:

(a) A^T e B^T são similares.

(b) A e B têm os mesmos autovalores.

(c) Os traços de A e B são iguais.

(d) Os determinantes de A e B são iguais.

Questão 2. Considere a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

<u>Sem efetuar os produtos</u>, apresente, com as respectivas justificativas:

(a) o determinante de S;

(b) os autovalores de S;

(c) os autovetores de S;

(d) a razão pela qual S é simétrica definida positiva.

Questão 3. Sejam $T \subset \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^n$ subespaços vetoriais diferentes do elemento nulo

- Mostrar que $T + V$ e $T \cap V$ são subespaçõs vetoriais
- Se $dim(T) + dim(V) = n$ e $dim(T \cap V) = 1$, mostrar que $T^{\perp} \cap V^{\perp} \neq \{0\}$.
- Se existe $0 \neq \gamma \in R^p$, $\gamma \geq 0$ tal que

  $$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i = 0$$

  Provar se $A = [v_1 \dots v_p]$ A matriz nxp o sistema

  $$A^T x > 0$$

  não tem solução.
- Seja $V = \{v = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i \;\; \gamma \in \mathbb{R}^p, \;\; \gamma \geq 0\}$ tal que $V = \mathbb{R}^n$ mostrar que p minimo é $n + 1$

Questão 4. Calcule a distância do vetor $(1,2,3,4)^t$ ao subespaço gerado por $(1,-1,1,0)^t$ e $(1,2,1,1)^t$ (esses dois vetores são perpendiculares entre si). Isso pode ser feito *sem calcular explicitamente o vetor projeção*, simplificando as contas. Apresente a resposta final como raiz de uma fração com denominador 21.

Seja A uma matriz quadrada. Diga se é verdadeiro ou falso:

1. A^t tem os mesmos autovalores que A.
2. A^t tem os mesmos autovetores que A.
3. Se A é diagonalizável, então A^t também é.

Justifique formalmente suas repostas.

Questão 5. 1. Utilize um polinômio de Taylor de ordem 3 da função $\operatorname{sen}(x)$ para encontrar uma aproximação da raíz não nula da equação $x^2 = \sin(x)$.

Questão 6. Uma piscina de forma elíptica é ladeada por um jardim retangular, conforme Figura 1.

(-7,-2.5)(6,2.5)
[linewidth=2pt](0,0)(4.5,2) (-4.5,-2)(4.5,-2) (-4.5,2)(4.5,2) (-4.5,-2)(-4.5,2) (4.5,-2)(4.5,2)
(-4.5,-2)(-4.5,2)(4.5,2)(4.5,-2) [linestyle=dashed,offset=15pt]—-—(-4.5,-2)(-4.5,2) *4 m
[linestyle=dashed,offset=-15pt]—-—(-4.5,-2)(4.5,-2) *9 m

Figura 1: Piscina elíptica e um retângulo.

Um jardineiro deve plantar grama em toda a área, denotada por $\mathcal{A}$, delimitada pelo retângulo e pela elipse. Pede-se: (a) Utilize integração para calcular a área delimitada pela elipse e (b) determinar o menor número de placas de grama necessário para plantar toda a área $\mathcal{A}$. Admita que todas as placas de grama são quadrados de lado igual a $70\,\text{cm}$, que só são vendidas em número inteiro de placas, e, para efeito de conta, adote $\pi = \frac{22}{7}$.

Questão 7. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $c \in I$ é um ponto crítico de f se $f'(c) = 0$. Mostre que, se f for de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

Questão 8. Considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada implicitamente pela equação diferencial

$$f'(x) - f(x)[(1 - f(x)]$$

. Esboce o gráfico de f, indicando as assíntotas, em cada caso.

a) $f(0) = 0.2$;

b) $f(0) = 2$.

Obs: Não é necessário obter a expressão de f!
Dada a série de potências

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Pede-se:

a) O raio de convergência de S;

b) Todos os valores de x para os quais S é convergente.