Exame de Admissão 2S 2024

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

10 de junho de 2024

Código de Identificação: ____

Questões	Notas	Questões	Notas
Q1		**Q5**	
Q2		**Q6**	
Q3		**Q7**	
Q4		**Q8**	

- Desligue o celular.
- **NÃO** retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação.
- A prova tem duração de quatro horas.
- Respostas sem justificativas **NÃO** serão consideradas.

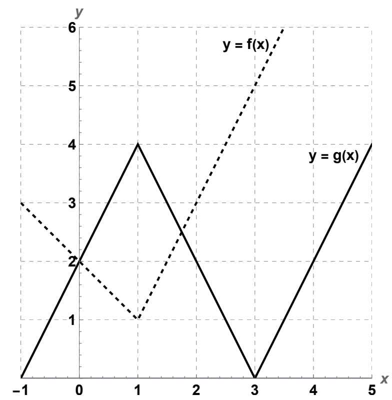
Boa prova!

Q1.

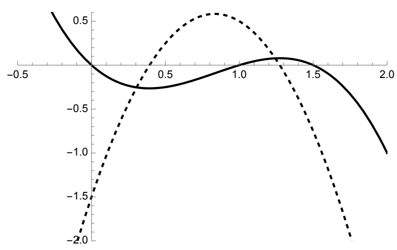
a) Considere as funções $f(x)$ e $g(x)$ representadas nos gráficos da figura abaixo e as funções $u(x)$ e $v(x)$ definidas por: $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = g(f(x))$. Calcule (ou justifique a inexistência de) cada uma das seguintes derivadas:

i) $u'(2)$

ii) $v'(2)$



b) Considere a Figura abaixo, que tem o gráfico de duas funções contínuas no intervalo representado no eixo horizontal. Uma função é a derivada da outra. Qual é a função e qual é a derivada? Explique.



Q2. Existem funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e não nulas tais que $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$? Justifique.

Q3. Apenas uma das seguintes alternativas está **errada**. Assinale-a, justificando sua resposta.

a) Se $f(x)$ é uma função diferenciável até segunda ordem, tal que $xf'(x) + f(x) = x$, e se $f(x)$ tem um ponto de máximo x_0, então x_0 não pode ser positivo.

b) Existem funções descontínuas em a que possuem limite com x tendendo ao ponto a.

c) Suponha que f seja diferenciável até segunda ordem. Se f tem um mínimo local em a então $f''(a) > 0$.

d) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não são contínuas em um ponto x_0, pode ocorrer da função composta $f \circ g$ ser contínua em x_0 .

Q4. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Existe uma função par g tal que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx$? Justifique sua resposta.

Q5. Seja C o espaço vetorial das funções continuas definidas em $[0, 1]$. Considere o subconjunto

$$Y = \{f \in C \mid \exists\, L \geq 0 \text{ tal que } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}\}$$

O conjunto Y é subespaço vetorial de C? Justifique sua resposta!

Q6. Sejam (λ_i, v_i) os autovalores e autovetores de uma matriz A. Quais são os autovalores e autovetores de $A - \sigma I$ onde σ é uma constante e I é a matriz identidade?

Q7.

a) Seja A uma matriz $m \times n$ com colunas linearmente independentes e defina a matriz $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. Mostre que P é uma matriz idempotente (isto é, $P^2 = P$) que satisfaz $Px = x$ para todo $x \in \mathrm{Im}(A)$.

b) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que a equação matricial $XA + B = X$ possui uma única solução se nenhum dos auto-valores de A é igual a 1.

Q8. Para todo espaço vetorial real V e $S = \{U \subseteq V \mid U \text{ é subespaço vetorial de } V\}$, podemos definir as seguintes operações

$$\begin{array}{rll} + : & S \times S & \to S \\ & (U, U') & \mapsto U + U' \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rll} \cdot : & \mathbb{R} \times S & \to S \\ & (\alpha, U) & \mapsto \alpha \cdot U, \end{array} \tag{1}$$

com $U + U' = \{u + u' : u \in U \text{ e } u' \in U'\}$ e $\alpha \cdot U = \{\alpha u : u \in U\}$.

a) Mostre que as operações $+$ e $\cdot$ apresentadas em (1) são bem definidas, isto é, $U + U'$ e $\alpha \cdot U$ são elementos de S.

b) Existe um elemento $Z \in S$ tal que $U + Z = U, \forall U \in S$?

c) Mostre que se $|V| \geq 1$ (i.e., a dimensão de V é maior ou igual a 1), então S não é um espaço vetorial com as operações $+$ e $\cdot$ apresentadas em (1).

Rascunho