Exame de Admissão 2024

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

04 de Dezembro de 2023

Código de Indentificação: ______________________________

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Questões	Notas
Q5	
Q6	
Q7	
Q8	
Q10	
Total	

- Desligue o celular.
- **NÃO** retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação.
- A prova tem duração de quatro horas.
- Respostas sem justificativas **NÃO** serão consideradas.

Boa prova!

Q1. Considere a função $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

a) A função $f(x)$ é diferenciável? Se sim, exiba sua derivada.

b) Mostre que $\int f(x)dx = c + xf(x) + \frac{1}{2}e^{-x^2}$, onde c é uma constante arbitrária.

c) Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe.

Q2. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Analise as perguntas abaixo, justificando suas respostas.

a) Se $x_n \to x$, então a sequência (z_n), $z_n = x_{n+1} - x_n$, converge? Se sim, qual é o limite dessa sequência?

b) Seja (z_n), $z_n = x_{n+1} - x_n$. Se $z_n \to 0$, então (x_n) converge?

c) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e (z_n), $z_n = f(x_n)$. Se (z_n) converge, então (x_n) converge?

Q3. Considere o famoso de teorema de Weirstrass: "Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então f é limitada atinge um máximo e um mínimo nesse intervalo". Abaixo, analise se uma das condições desse teorema pode ser enfraquecida:

a) f poderia ser descontínua?

b) I poderia ser um intervalo não limitado?

c) I poderia ser um intervalo não fechado?

Q4.

a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$f(x)$ é contínua em $x = 0$?

b) Verifique que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ possui uma raiz entre 1 e 2, sem resolver explicitamente a equação.

Q5. O teorema de Green nos diz que dadas funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ tais que suas derivadas parciais existem e são contínuas em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e dada um curva fechada contínua por partes $\mathcal{C}$ inteiramente contida em $\mathcal{U}$, então

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy,$$

onde $\mathcal{R}$ é a região delimitada por $\mathcal{C}$.

a) Considere o campo vetorial $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Mostre que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

b) Considere $\mathcal{C}$ o círculo unitário com centro na origem. Mostre que

$$\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = 2\pi.$$

c) O resultado do item anterior contradiz o teorema de Green? (Lembre do item a)).

Q6. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

é inversível?

Q7. Considere a transformação linear dada por

$$T(x,y) = (3x, x-y, y+x),\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Determine a representação matricial de T com relação às bases canônicas.

b) T é uma transformação injetiva? Justifique.

c) T é uma transformação sobrejetiva? Justifique.

Q8. Seja $S = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = 0\}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo.

a) Determine $S^\perp$.

b) Dado $v \in \mathbb{R}^n$, determine sua projeção ortogonal em $S^\perp$.

c) Dado $v \in \mathbb{R}^n$, determine sua projeção ortogonal em S.

Q9. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinônios de graus ≤ 2 com coeficientes reais. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(a + bx + cx^2) = a + (2b + c)x + (3c)x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Determine o núcleo desse operador.

b) T é um operador diagonalizável? Justifique.

Q10. Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica com autovalores λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n (contando as multiplicidades algébricas). Mostre que:

a) Dados os autopares (λ_i, v_i) e (λ_j, v_j) com $\lambda_i \neq \lambda_j$, então v_i e v_j são ortogonais.

b) $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho