Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Admissão 2020

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas. **Justifique** *todos os argumentos. Respostas sem justificativas* **não** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Questão 1. Seja $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$. Demonstre que $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus W$, onde S é o subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas e W o subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes anti–simétricas.

Questão 2. Determinar uma Transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de modo que o conjunto $\{(1\ 2\ 0\ 1),$ $(-1\ 0\ 0\ 3)\}$ seja gerador para Imagem de F. Justifique as passagens de sua resolução.

Questão 3. Considere a matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) Para cada uma das afirmações abaixo, dê uma justificativa, se for Verdadeira, ou um contra-exemplo, caso seja Falsa.

(a1) Suponha que $posto(A) = m$. Então o sistema linear $Ax = b$ tem solução para todo $b \in \mathbb{R}^m$.

(a2) Suponha que $posto(A) = p < min\{m, n\}$. Então o sistema linear $Ax = b$ tem solução para todo $b \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$.

(b1) Calcule a projeção ortogonal de b no subespaço gerado pelas colunas de A, Imagem de A.

(b2) Determine um vetor ortogonal à projeção encontrada no item (b1). Em que subespaço está esse vetor? Justifique.

Questão 4. Considere a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.
(a) Suponha que A é simétrica definida positiva, isto é, $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo. Mostre que todos os autovalores de A são positivos.
(b) Mostre que todos os autovalores de AA^T são não–negativos.
(c) Seja (λ, x) um autopar para A.
(c1)Mostre que (λ^k, x) é um autopar para A^k, para cada inteiro positivo k.
(c2) Se

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \alpha_k x^k$$

é um polinômio de grau k, então definimos $p(A)$ como sendo a matriz

$$p(A) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots \alpha_k A^k.$$

Mostre que $(p(\lambda), x)$ é um autopar para $p(A)$.

Questão 5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, uma função continuamente diferenciável até ordem n. Mostre que se f possui $n + 1$ raízes distintintas em $[a, b]$, então, $f^{(n)}$ possui ao menos uma raiz em $[a, b]$, onde $f^{(n)}$ representa a n-ésima derivada de f.

Questão 6. Nos ítens a seguir, justifique sua resposta.

(a) Considere a função $\varphi(x, y)$ dada por

$$\varphi(x, y) = \int_0^x e^{-yt^2}\, dt.$$

Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

(b) Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Questão 7. Dizemos que um fluido é *incompressível* se sua densidade for constante. Considere um fluido em escoamento com velocidade $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{j}$, $y > 0$.

(a) O fluido é imcompressível? Por que?

(b) Determine a densidade ρ, que só dependa de y, que satisfaça a *equação da continuidade*:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

(c) Suponha que a densidade ρ do fluido só dependa de y e de t. Mostre que ρ deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + y \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho.$$

Questão 8. Considere a equação diferencial ordinária linear

$$x' = A \cdot x, \tag{1}$$

onde A é uma matriz $d \times d$, ou seja, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Assim como no caso $d = 1$, a solução pode ser dada por uma exponencial, onde definimos a exponencial de uma matriz A, $n \times n$ por

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{2}$$

com a convenção de que $e^0 = Id$.

(a) Mostre que a série de potências (2) é convergente para qualquer A.

(b) Dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, mostre que $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$, $t \in \mathbb{R}$ é solução de $x' = A \cdot x$ com $x(t_0) = x_0$.

(c) Se A puder ser escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

com $\beta \in \mathbb{R}$, mostre que a solução será dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\operatorname{sen} t\beta \\ \operatorname{sen} t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} \cdot x_0$$